

## Obiectivul 1 - Studiul aspectelor referitoare la procesarea semnalelor folosind conceptul de compressed sensing

### A1.1. - Studiul avantajelor si limitarilor conceptului de CS

### A1.2.- Studiul teoremelor legate de CS si n-widths si a consecintelor acestora

#### 1.1. Semnale și reprezentări rare

În general, un semnal este considerat *rar* (*sparse*, lb.eng.; *parcimonieux*, lb.fr.) dacă valoarea normei sale  $\ell_p$  este mică. În domeniul prelucrărilor de semnal, norma  $\ell_p$  a unui semnal  $x \in \mathbb{R}^N$  se definește astfel:

$$\|x\|_p = \left( \sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pentru o valoare  $p \geq 1$ , funcția definită mai sus respectă cele trei proprietăți binecunoscute care definesc o normă într-un spațiu vectorial:

1.  $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$  (omogenitate)
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inegalitatea triunghiului)
3.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Pentru valori  $0 < p < 1$ , funcția astfel definită nu mai respectă proprietatea de inegalitate a triunghiului, și ca atare nu mai este o normă în mod riguros. Cu toate acestea, prin extensie, literatura de specialitate păstrează denumirea de *normă* și în aceste cazuri, de altfel foarte des întâlnite în teoria achiziției comprimate. Ca atare, vom păstra convenția și în această lucrare și vom extinde noțiunea de *normă*  $\ell_p$  și pentru acestea.

Pentru valoarea  $p = 0$ , limita pentru  $p \rightarrow 0$  a formulei de mai sus conduce la următoarea definiție:

$$\|x\|_0 = \sum_i c_i, \text{ unde } c_i = \begin{cases} 1, & x_i \neq 0 \\ 0, & x_i = 0 \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, norma  $\ell_0$  a unui vector se definește ca fiind numărul de coeficienți nenuli pe care îi conține. Ca și în situația prezentată anterior, termenul de *normă* reprezintă un abuz de limbaj, întrucât această definiție nu respectă primele două proprietăți ale unei norme, enumerate mai sus. Din aceleași considerente, însă, vom păstra această convenție. Ca atare, denumirea de *normă*  $\ell_p$  va fi utilizată pentru orice valoare  $p \geq 0$ .

În Figura 1 sunt înfățișate sferile  $\ell_p$  într-un spațiu bidimensional, adică punctele care au aceeași valoare a normei  $\ell_p$  (aici, egală cu 1), pentru diverse valori ale lui  $p$ . Pentru  $p = 0$ , domeniul cuprinde doar cele două axe (exceptând punctul 0). Se observă că valori mici ale lui  $p$  implică puncte situate în apropierea celor două axe, funcționând astfel ca niște aproximații ale normei  $\ell_0$ .

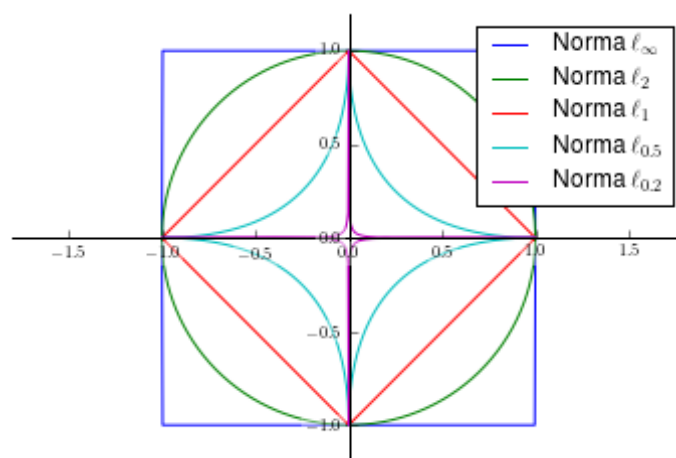


Figura 1 - Punctele dintr-un plan care au norma  $\ell_p$  egală cu 1

În general, cele mai folosite valori ale lui  $p$  sunt 0 și 1. În sens strict, termenul de *semnal rar* desemnează acele semnale care au o valoare mică a normei  $\ell_0$ . Dacă  $\|x\|_p = k$ , adică un semnal

are exact  $k$  componente nenule, spunem că  $x$  are raritatea egală cu  $k$ . În multe cazuri însă, această definiție este prea strictă; de exemplu, pentru semnale afectate de zgomot este practic imposibil a avea coeficienți riguros egali cu zero. Ca atare, definiția este de obicei "relaxată" pentru a include orice normă  $\ell_p$  cu  $0 \leq p \leq 1$ . După cum se vede în Figura 1, acestea pot fi interpretate ca aproximări ale normei  $\ell_0$ , mai puțin riguroase dar permițând o analiză mai robustă.

Pentru  $p < 1$ , normele  $\ell_p$  nu satisfac inegalitatea triunghiului, astfel că problemele de optimizare care implică minimizarea normei  $\ell_p$  pe o mulțime convexă de semnale sunt ele însele neconvexe, ceea ce le face foarte dificil de rezolvat în general (intractabile). Din acest motiv neconvexitatea reprezintă un dezavantaj major, problemele de optimizare de acest fel fiind esențiale în teoria achiziției comprimate. Din contră, minimizarea normei  $\ell_1$  este o problemă de optimizare convexă, pentru care există algoritmi eficienți de soluționare. Prin urmare, norma  $\ell_1$  poate fi considerată un compromis optim între o măsură riguroasă a rarității (care necesită  $p$  cât mai mic) și eficiența algoritmilor de rezolvare (pentru optimizare convexă este necesar ca  $p \geq 1$ ), motiv pentru care este utilizată frecvent atât în teorie cât și în practică.

Într-un sens și mai larg, raritatea poate fi definită în raport cu o anumită bază sau dicționar supracomplet de semnale. Pentru un semnal  $x$  într-un spațiu vectorial generat de o bază  $B$ , spunem că  $x$  este rar în baza  $B$  dacă reprezentarea (descompunerea) sa  $\gamma$  în baza  $B$  este rară. Această definiție este o generalizare a celor precedente, care reprezentau doar cazul particular în care baza  $B$  este chiar baza canonică  $I_n$ . Un dicționar supracomplet reprezintă o generalizare a conceptului de bază, fiind constituit dintr-un număr  $N$  de vectori (denumiți *atomi* în literatura de specialitate) mai mare decât dimensiunea spațiului pe care îl generează,  $N > n$ . Ca atare, un semnal  $x$  poate avea în general o infinitate de reprezentări într-un dicționar  $D$ . Spunem că  $x$  este rar în dicționarul  $D$  dacă cel puțin una dintre descompunerile sale în  $D$  este rară.

## 1.2. Achiziția comprimată a semnalelor

Fie un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  cu reprezentare rară în baza definită de matricea  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (coloanele matricii reprezintă elementele bazei). Vectorul  $x$  poate fi scris ca

$$x = B\gamma,$$

unde  $\gamma$  reprezintă descompunerea rară a lui  $x$  în  $B$ .

Să presupunem că putem face un set de  $m$  măsurători asupra lui  $x$  prin proiecția sa pe un număr de  $m$  vectori oarecare (numiți *vectori de măsurare* sau *de proiecție*), unde  $m < n$ . Dacă se consideră acești vectori de măsurare ca reprezentând liniile unei *matrici de achiziție*  $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , procesul de achiziție al semnalului  $x$  este descris de multiplicarea cu matricea  $P$ :

$$y = Px = PB\gamma = A\gamma$$

Produsul dintre  $P$  și  $B$  poartă numele de *dicționar efectiv*. Făcând notația  $A = PB$ , se ajunge la forma uzuală a achiziției comprimate:

$$y = A\gamma \quad (1)$$

Această ecuație, ilustrată în Figura 2, exprimă faptul că vectorul rar  $\gamma$  este *achiziționat* cu ajutorul matricii  $A$ . Întrucât în general numărul de vectori de măsurare  $m$  este mult mai mic decât dimensiunea semnalului  $n$ , procesul poartă numele de *achiziție comprimată*.

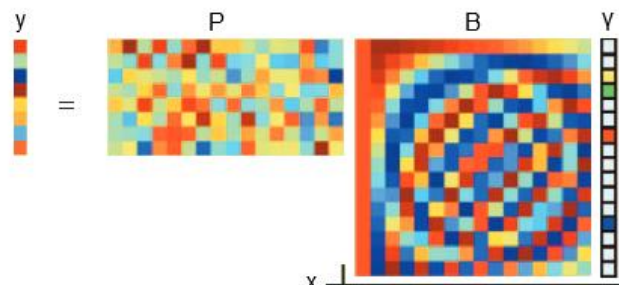


Figura 2 - Achiziția comprimată a unui semnal rar (imagine preluată din [1])

Problema centrală a teoriei achiziției comprimate a semnalelor poate fi enunțată în modul următor: în ce condiții este posibilă refacerea vectorului rar  $n$ -dimensional  $\gamma$  din cele  $m \ll n$  măsurători  $y$ ? Deși sistemul de ecuații este nedeterminat, numărul gradelor de libertate ale lui  $\gamma$  este mic, fiind vorba despre un semnal rar. Este așadar posibilă reconstituirea celor  $k$  coeficienți din cele  $m$  măsurători, dacă  $k < m \ll n$ . Se observă că reconstituirea lui  $\gamma$  permite imediat și

reconstituirea semnalului original  $x$ , întrucât acesta se obține imediat înmulțirea lui  $\gamma$  cu matricea bazei  $B$ .

O analiză mai robustă trebuie să ia în considerare și posibilitatea unui zgomot aditiv  $z$  suprapus peste măsurători. În acest caz, ecuația de achiziție poate fi scrisă ca:

$$y = A\gamma + z \quad (2)$$

Toate relațiile de mai sus rămân valabile și în cazul mai general în care reprezentarea rară a lui  $x$  se face nu într-o bază  $B$  ci într-un dicționar supracomplet  $D$ , compus din  $N > n$  atomi. Sigura diferență este aceea că dimensiunile dicționarului efectiv  $A$  vor fi acum  $m \times N$  iar  $\gamma$  este un vector  $N$ -dimensional. Folosirea unei baze reprezintă doar un caz particular de dicționar cu  $N = n$ .

### 1.3. Soluții și regularizare

Sistemul de ecuații care descrie achiziția semnalului este nedeterminat, întrucât matricea  $A$  are dimensiunea  $m \times N$ . Ca atare, recuperarea descompunerii rare  $\gamma$  nu este posibilă fără o condiție suplimentară care să asigure unicitatea soluției. Acest termen suplimentar de *regularizare* a problemei trebuie să exprime o informație cunoscută *a priori* despre vectorul  $\gamma$  sau despre  $x$ .

Teoria achiziției comprimate exploatează informația adițională despre raritatea semnalului într-o bază sau dicționar cunoscut. Un rezultat fundamental [2], [3] este următorul: dacă descompunerea  $\gamma$  este suficient de rară, atunci, dacă matricea  $A$  respectă o serie de condiții (pe care le vom prezenta în secțiunea următoare), vectorul  $\gamma$  este *soluția cea mai rară* dintre toate soluțiile sistemului de ecuații de achiziție. Aceasta înseamnă că  $\gamma$  poate fi obținut ca soluție a următoarei probleme de optimizare cu constrângeri:

$$\hat{\gamma} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \|\gamma\|_p, \text{ cu } y = A\gamma$$

Această problemă constă în găsirea soluției celei mai rare a unui sistem de ecuații  $y = A\gamma$ . Pentru valorile lui  $p$  cele mai des întâlnite în literatură,  $p = 0$  și  $p = 1$ , aceasta devine:

$$\hat{\gamma} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \|\gamma\|_0, \text{ cu } y = A\gamma, \quad (3)$$

respectiv:

$$\hat{\gamma} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \|\gamma\|_1, \text{ cu } y = A\gamma. \quad (4)$$

Varianta care utilizează norma  $\ell_0$  este o problemă *NP-hard* [4], ceea ce înseamnă un algoritm de complexitate ne-polinomială pentru rezolvare (în ipoteza  $P \neq NP$ ); problemele *NP-hard* sunt considerate practic imposibil de rezolvat pentru dimensiuni uzuale ale datelor. Cea de-a doua variantă, care utilizează norma  $\ell_1$  pentru a asigura raritatea soluției, este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de *Basis Pursuit* [5]. Aceasta este o problemă de optimizare convexă, care poate fi reformulată ca o problemă de programare liniară. Acest tip de problemă este în detaliu studiată în literatură și există numeroși algoritmi de rezolvare eficienți; mai multe detalii sunt prezentate într-o secțiune următoare.

Soluția obținută prin minimizarea normei  $\ell_1$  coincide cu cea corespunzătoare normei  $\ell_0$  pentru semnale suficient de rare [6]. Următorul exemplu ilustrează acest aspect și sugerează motivul pentru care are loc. Fie ecuația următoare:

$$1 = [0.5 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sistemul este nedeterminat, având o singură ecuație și două necunoscute. Spațiul soluțiilor acestei ecuații reprezintă un spațiu *afin* (spațiu liniar traslat), reprezentat în Figura 3, și conține două soluții de raritate 1:  $\gamma_1 = [0,1]^T$  și  $\gamma_2 = [2,0]^T$ . După cum se vede în Figura 3, minimizarea normei  $\ell_1$  a soluției, conform problemei (4), conduce la soluția rară  $\gamma_1 = [0,1]^T$ , așadar identică cu una din soluțiile minimizării normei  $\ell_0$ ; mai mult, oricare ar fi ecuația dată, se va obține întotdeauna una dintre cele două soluții rare. Explicația succesului normei  $\ell_1$  în găsirea unei soluții rare o reprezintă conturul său "ascuțit", care face ca soluția găsită să fie una situată pe cele două axe, așadar rară. Din contră, orice normă  $\ell_{p>1}$  are un contur mai "rotunjit" și va conduce în majoritatea cazurilor la găsirea unei soluții care nu este rară, poziționată undeva pe segmentul dintre  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$ . Exemplul sugerează că normele "ascuțite"  $\ell_{p \leq 1}$  pot fi folosite în anumite condiții în locul normei  $\ell_0$ , lucru confirmat de asemenea teoretic [6]. Menționăm că deși în acest exemplu există două soluții de aceeași raritate, într-un caz general  $N$ -dimensional este extrem de puțin probabil ca acest lucru să se întâmple, soluția cea mai rară fiind practic unică.

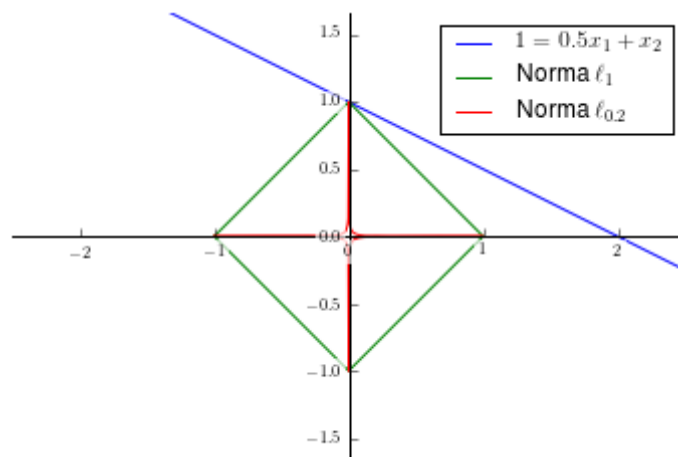


Figura 3 - Norma  $\ell_1$  poate înlocui cu succes norma  $\ell_0$  în găsirea soluțiilor rare (exemplu)

Ambele probleme de optimizare prezentate mai sus necesită satisfacerea riguroasă a constrângerii  $y = Ay$ , cu alte cuvinte presupun o descompunere rară exactă a lui  $y$ . În practică, însă, semnalele și măsurătorile sune întotdeauna afectate de zgomot într-o anumită măsură, și un anumit grad de eroare poate fi întotdeauna tolerat. Ca atare, o analiză robustă trebuie să ia în considerare posibilitatea unui zgomot aditiv suprapus peste vectorul măsurătorilor  $y$ , ca în ecuația de achiziție prezentată mai sus. În acest caz, condiția exactă  $y = Ay$  nu mai poate fi satisfăcută în mod riguros. O relaxare a acestei constrângeri, care acceptă o eroare de aproximare mai mică decât un anumit prag de toleranță dat de energia estimată a zgomotului, conduce la o formă mai robustă a problemelor de optimizare:

$$\hat{\gamma} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \|\gamma\|_0, \text{ cu } \|y - A\gamma\| \leq \epsilon \quad (5)$$

$$\hat{\gamma} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \|\gamma\|_1, \text{ cu } \|y - A\gamma\| \leq \epsilon \quad (6)$$

Constrângerea  $\|y - A\gamma\| \leq \epsilon$  poate fi relaxată mai puternic, fiind introdusă ca un termen suplimentar în funcția de minimizat:

$$\hat{\gamma} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \|y - A\gamma\| + \lambda \cdot \|\gamma\|_0 \quad (7)$$

$$\hat{\gamma} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \|y - A\gamma\| + \lambda \cdot \|\gamma\|_1 \quad (8)$$

Ecuațiile (7) și (8) reprezintă formulări neconstrânse (*unconstrained*) ale problemelor de optimizare. Parametrul  $\lambda$  controlează importanța relativă dintre primul termen, care cuantifică eroarea de aproximare, și cel de al doilea, care impune raritatea soluției căutate.

O formulare alternativă, cunoscută sub numele de *algoritmul LASSO* [7], poate fi scrisă sub forma:

$$\hat{\gamma} = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \|y - A\gamma\| \text{ s. t. } \|\gamma\|_1 \leq \tau \quad (9)$$

Se urmărește minimizarea unei funcționale pătratice sub constrângerea ca norma  $\ell_1$  a soluției să fie mărginită de valoarea parametrului  $\tau$ . Această problemă poate fi reformulată ca o problemă de programare pătratică (*quadratic programming*) de dimensiune dublă, pentru care există algoritmi eficienți de rezolvare [8].

Toate formulările diferite de mai sus reprezintă moduri distincte de a exprima aceeași problemă fundamentală de optimizare, respectiv găsirea soluției celei mai rare a unui sistem de ecuații nedeterminat, cu robustețe mai mare sau mai mică la zgomot și la inexactitatea descompunerii rare. Pentru o parte dintre acestea, cele mai utilizate, vor fi prezentate condiții riguroase care asigură faptul că soluția obținută este apropiată de vectorul original.

#### 1.4. Condiții pentru recuperarea semnalelor rare

În această secțiune sunt prezentate rezultate fundamentale asupra condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească dicționarul efectiv  $A$  pentru a garanta unicitatea soluției rare  $\gamma$  a sistemului de ecuații, fiind astfel posibilă refacerea semnalului original prin rezolvarea uneia dintre problemele de optimizare prezentate mai sus.

#### 1.4.1. Spark-ul unei matrici

Una dintre primele condiții publicate în literatură are la bază conceptul de *spark* al unei matrici, introdus în [2]:

**Definiție.** [2]: Fie matricea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . *Spark*-ul matricii  $A$ , notat  $\sigma$ , reprezintă numărul minim de coloane ale lui  $A$  care sunt liniar independente.

*Spark*-ul unei matrici este o mărime relevantă în contextul semnalelor rare din următorul motiv: dacă un semnal are două descompuneri rare în dicționarul  $A$  cu raritățile  $k_1$  și  $k_2$ , atunci diferența dintre cei doi vectori descompunere este un vector cu raritatea cel mult  $k_1 + k_2$  care aparține spațiului nul al matricii  $A$ , ceea ce înseamnă că există  $k_1 + k_2$  coloane liniar dependente în matricii  $A$ . O valoare suficient de mare  $\sigma > k_1 + k_2$  previne această situație, și astfel este garantată unicitatea descompunerii rare.

Următoarea teoremă definește în mod riguros o condiție suficientă de unicitate în cazul problemei de optimizare (3):

**Teoremă.** [2]: Fie  $\gamma$  un vector rar cu  $\|\gamma\|_0 = k$ , achiziționat cu o matrice  $A$  ca în (1). Fie  $\sigma$  *spark*-ul matricii  $A$ . Dacă  $k < \sigma/2$ , atunci  $\gamma$  este soluție unică a problemei de optimizare (3).

**Demonstrație.** Demonstrația rezultă imediat: dacă (3) ar admite o soluție diferită, cu raritatea  $k' \leq k$ , atunci diferența celor două soluții ar produce un vector de raritate  $(k' + k) < \sigma$  care aparține spațiului nul al matricii  $A$ . Acest lucru înseamnă un set de coloane liniar independente ale lui  $A$  în număr mai mic decât *spark*-ul matricii, ceea ce contrazice definiția acestuia.

Din păcate, calcularea *spark*-ului unei matrici este o problemă de complexitate combinatorică, și deci *NP-hard*, ceea ce limitează aplicabilitatea practică a teoremei.

#### 1.4.3. Proprietatea de izometrie restrânsă (Restricted Isometry Property, RIP)

Una dintre direcțiile de cercetare principale din literatura de specialitate se bazează pe studiul unor proprietăți de izometrie restrânsă ale matricii  $A$  [5], [9], [10].

**Definiție.** [5] Fie matricea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , coloanele sale fiind notate  $a_i \in \mathbb{R}^m$ . Pentru orice număr întreg  $k$  cu  $1 \leq k \leq n$ , se definește constanta de izometrie restrânsă (*Restricted Isometry Constant, RIC*) de ordin  $k$ , notată  $\delta_k$ , ca fiind cea mai mică valoare reală care satisface următoarea relație:

$$(1 - \delta_k) \|\gamma\|_2^2 \leq \|A\gamma\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\gamma\|_2^2 \quad (10)$$

pentru toți vectorii  $\gamma$  cu raritate cel mult  $k$ .

Notăm cu  $T$  setul indicilor corespunzători coeficienților nenuli din  $\gamma$ , și cu  $A_T$  matricea compusă numai din coloanele lui  $A$  ce aparțin lui  $T$ . Condiția (10) exprimă faptul că toate sub-matricile  $A_T$  compuse din cel mult  $|T|$  coloane ale lui  $A$  se comportă aproximativ ca o matrice ortonormală. Se reamintește faptul că satisfacerea condiției de izometrie  $\|x\|_2 = \|Ux\|_2, \forall x$ , reprezintă o condiție necesară și suficientă pentru ca o matrice oarecare  $U$  să fie ortonormală. În locul egalității, (10) permite o toleranță de  $\pm\delta_k$ , de unde și numele de izometrie "*restrânsă*". O valoare mai mică a  $\delta_k$  înseamnă că sub-matricile  $A_T$  se comportă mai asemănător cu matricile ortogonale. O proprietate care decurge în mod natural din această definiție este aceea că secvența de constante RIC  $\delta_k$  este monoton crescătoare,  $\delta_k \leq \delta_{k+1}$ .

Dacă constantele  $\delta_k$  au valori mai mici, recuperarea semnalelor rare este mai facilă. Acest lucru este statuat în teoremele următoare.

**Teoremă.**[5], [10] Fie  $\gamma$  un vector rar cu  $\|\gamma\|_0 = k$ , achiziționat cu o matrice  $A$  ca în (1). Dacă constanta  $\delta_{2k}$  satisface  $\delta_{2k} < 1$ , atunci problema de optimizare (3) are soluție unică și aceasta este  $\gamma$ .

**Demonstrație.** Fie  $\delta_{2k} < 1$ , și presupunem că soluția  $\hat{\gamma}$  a problemei (3) este diferită de  $\gamma$ . Ca urmare, raritatea soluției  $\hat{\gamma}$  este cel mult egală cu cea a lui  $\gamma$ ,  $\|\hat{\gamma}\|_0 \leq k$ , întrucât (3) conduce la soluția de normă  $\ell_0$  minimă. Din moment ce atât  $\hat{\gamma}$  cât și  $\gamma$  sunt soluții ale sistemului din (1), rezultă că diferența lor aparține spațiului nul al matricii  $A$ :

$$0 = A(\hat{\gamma} - \gamma).$$

Dar  $\hat{\gamma} - \gamma$  este un vector cu raritatea cel mult egală cu  $2k$ , întrucât se obține ca diferența a doi vectori cu raritatea cel mult egală cu  $k$ . Din definiția constantei RIC (10) rezultă că  $\delta_{2k} \geq 1$ , ceea ce contrazice condiția specificată în teoremă. Ca atare, soluția problemei este unică și este egală cu  $\hat{\gamma} = \gamma$ .

Teorema de mai sus arată că se poate recupera un semnal  $\gamma$  cu raritatea  $k$  în urma achiziției comprimate cu matricea  $A$ , dacă  $A$  satisface  $\delta_{2k} < 1$ . În acest caz se spune că matricea  $A$  satisface *proprietatea de izometrie restrânsă (Restricted Isometry Property, RIP)*. Intuitiv,

proprietatea RIP necesită ca coloanele lui  $A$  să fie suficient de independente între ele: dacă ar fi prea similare, atunci sub-matricile  $A_T$  ar fi departe de ortogonalitate, ceea ce ar conduce la valori mari ale constantelor RIC.

Din păcate, problema de optimizare (3) este *NP-hard*; în plus, semnalele reale sunt în general afectate de zgomot, și deci condiția de raritate  $\|\gamma\|_0 = k$  nu este niciodată îndeplinită în mod riguros. Următoarea teoremă oferă o condiție suficientă pentru recuperarea semnalelor folosindu-se norma  $\ell_1$  în loc de  $\ell_0$ .

**Teoremă.** [10] Fie un vector  $\gamma$  și fie  $\gamma_k$  vectorul care conține doar pe cei mai mari  $k$  coeficienți ai săi (în valoare absolută), restul coeficienților fiind zero. Vectorul  $\gamma$  este achiziționat comprimat cu matricea  $A$  ca în (1). Dacă  $\delta_{2k}$  satisface  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ , atunci soluția  $\hat{\gamma}$  a problemei de optimizare (4) satisface următoarele relații:

$$\|\hat{\gamma} - \gamma\|_1 \leq C_0 \|\gamma - \gamma_k\|_1 \quad (11)$$

și

$$\|\hat{\gamma} - \gamma\|_2 \leq C_0 k^{-1/2} \|\gamma - \gamma_k\|_1 \quad (12)$$

*Demonstrație.* Inegalitatea (12) reprezintă un caz special, pentru cazul fără zgomot, al următoarei teoreme. Inegalitatea (11) derivă din aceeași demonstrație.

Următoarea teoremă extinde analiza precedentă și la cazul în care măsurătorile sunt afectate de zgomot aditiv.

**Teoremă.**[10] Fie un vector  $\gamma$  și fie  $\gamma_k$  vectorul care conține doar pe cei mai mari  $k$  coeficienți ai săi (în valoare absolută), restul coeficienților fiind zero. Vectorul  $\gamma$  este achiziționat comprimat cu matricea  $A$ , cu un semnal de zgomot  $z$  suprapus peste măsurători, ca în (2). Dacă  $\delta_{2k}$  satisface  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ , atunci, pentru  $\|z\|_2 \leq \epsilon$ , soluția  $\hat{\gamma}$  a problemei de optimizare (6) satisface:

$$\|\hat{\gamma} - \gamma\|_2 \leq C_0 k^{-1/2} \|\gamma - \gamma_k\|_1 + C_1 \epsilon \quad (13)$$

Demonstrația se găsește în [10], și nu este inclusă în acest raport din considerente de spațiu.

În cazul în care  $\gamma$  este rar în mod riguros, cu  $\|\gamma\|_0 \leq k$ , atunci  $\gamma = \gamma_k$  și teorema arată că se poate recupera semnalul  $\gamma$  cu o precizie care depinde cu un factor liniar de energia zgomotului aditiv. Într-un scenariu lipsit de zgomot,  $\gamma$  este recuperat fără erori.

Cele trei teoreme prezentate mai sus demonstrează faptul că o valoare mică a constantei RIC garantează reconstituirea cu precizie a unui vector suficient de rar, prin rezolvarea problemelor de optimizare (3), (4), respectiv (6). Astfel, aceste teoreme ocupă un loc central în cadrul fundamentelor teoriei achiziției comprimate. Din păcate, este demonstrat că a găsi valoarea exactă a constantei RIP  $\delta$  este de asemenea o problemă *NP-hard* [11]. Acest lucru face imposibilă într-un caz practic verificarea directă a condițiilor de mai sus, cel puțin pentru matrici oarecare deterministe. Anumite categorii de matrici aleatoare, însă, satisfac această proprietate cu mare probabilitate.

#### 1.4.4. Proprietatea spațiului nul (Null Space Property, NSP)

O alta proprietate interesantă înrudită cu RIP este cunoscută sub numele de proprietatea spațiului nul (*Null Space Property, NSP*), introdusă în [12].

**Definiție.** [12] Dată fiind matricea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , fie  $\mathcal{N}(A)$  spațiul nul al  $A$ . Spunem că  $A$  satisface proprietatea spațiului nul (NSP) de ordinul  $k$  cu constanta  $C$  în  $\ell_1$  dacă  $\forall h \in \mathcal{N}(A)$  și pentru toate seturile de coeficienți  $T \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  cu  $\text{card}(T) \leq k$ , este valabilă următoarea relație:

$$\|h_T\|_1 \leq C \|h_{T^c}\|_1, \quad (14)$$

unde  $h_T$  conține numai coeficienții lui  $h$  din setul  $T$  (ceilalți fiind zero) și  $h_{T^c}$  conține numai coeficienții care nu aparțin setului  $T$ .

De obicei se consideră valoarea minimă a lui  $C$  care satisface (14). Definiția de mai sus necesită ca toți vectorii  $h \in \mathcal{N}(A)$  din spațiul nul al matricii  $A$  să aibă raritate redusă, energia lor trebuind să fie suficient de uniform răspândită în loc de a fi concentrată în câțiva coeficienți. Acest lucru este opus proprietății de raritate: pentru un vector  $h$  de raritate  $k$  toată energia este concentrată în cei  $k$  coeficienți. În contextul definiției de mai sus, dacă includem toate locațiile coeficienților nenuli în  $T$  se obține  $\|h_T\|_1 > 0$  și  $\|h_{T^c}\|_1 = 0$ , ceea ce conduce la o valoare pentru constanta  $C$  ce tinde la infinit. Dimpotrivă, un vector  $h$  care ar avea coeficienți de valoare egală  $h_i$  ar avea o constantă minimă  $C$ , indiferent de cum este ales setul  $T$ . Așadar, o valoare limitată a lui  $C$  în (14) implică o situație mai apropiată de cazul al doilea.

Satisfacerea proprietății NSP cu o constantă  $C < 1$  este reprezentată o condiție necesară și suficientă pentru succesul problemei de optimizare (4):

**Teoremă.** [12], [13] Fie matricea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Fie  $\gamma$  un semnal de raritate  $k$  achiziționat cu matricea  $A$  ca în (1). Atunci  $\gamma$  este soluția problemei de optimizare (4) pentru toate semnalele  $\gamma$  de raritate  $k$  dacă și numai dacă  $A$  satisface proprietatea NSP cu o constantă  $C < 1$ .

Subliniem faptul că proprietatea NSP reprezintă o condiție necesară și suficientă pentru refacerea unui semnal rar prin minimizarea normei  $\ell_1$ , în timp ce proprietatea RIP este numai suficientă, nu și necesară. Ca atare, proprietatea RIP implică proprietatea NSP.

Din păcate, găsirea valorii precise a constantei NSP pentru o matrice dată  $A$  este de asemenea o problemă *NP-hard*, după cum se demonstrează în [11].

#### 1.4.5. Coerența mutuală

O condiție alternativă ce garantează recuperarea cu succes a semnalelor rare se bazează pe *coerența mutuală* a matricii de achiziție  $A$  din (1), [14], [3].

**Definiție.** Fie o matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$ , ale cărei coloane sunt notate  $a_i$ . *Coerența mutuală*  $\mu$  a matricii  $A$  reprezintă valoarea absolută maximă a corelației între oricare două coloane normalizate  $a_i$  și  $a_j$  ale matricii.

$$\mu = \operatorname{argmax}_{i \neq j} \frac{\langle a_i, a_j \rangle}{\|a_i\| \|a_j\|} \quad (15)$$

Cu cât coerența mutuală este mai mică, cu atât coloanele matricii  $A$  sunt mai ortogonale între ele (pentru o matrice ortogonală  $\mu = 0$ ), iar matricea este mai utilă pentru recuperarea semnalelor rare, după cum se arată în teoremele următoare.

**Teoremă.** [2], [15], [14] Fie o matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$  ce are coerența mutuală  $\mu$ , și fie un vector  $\gamma$  cu  $\|\gamma\|_0 = k$ , în contextul achiziției comprimate fără zgomot definite în (1). Dacă condiția următoare este adevărată:

$$\|\gamma\|_0 < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu(D)} \right) \quad (16)$$

atunci sunt valabile următoarele afirmații:

1.  $\gamma$  este cea mai rară descompunere a lui  $x$  în  $D$ , adică este soluția ecuației (3).
2.  $\gamma$  poate fi recuperat prin minimizare  $\ell_1$ , adică este și soluția ecuației (4).
3.  $\gamma$  poate fi recuperat utilizând algoritmul Orthogonal Matching Pursuit [16], [17].

Pentru cazul achiziției comprimate afectate de zgomot, următoarea teoremă constituie un rezultat asemănător:

**Teoremă.**[3] Fie  $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$  o matrice cu coerența mutuală  $\mu$  și un vector  $\gamma$  cu  $\|\gamma\|_0 = k$ , în contextul achiziției comprimate cu zgomot definite de (2), cu energia zgomotului  $\|z\|_2 \leq e$ . Atunci:

1. Dacă  $k \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right)$ , atunci vectorul  $\hat{\gamma}$  obținut ca soluție a problemei de optimizare (5) satisface:

$$\|\hat{\gamma} - \gamma\|_2^2 \leq \frac{(\epsilon + e)^2}{1 - \mu(2k - 1)}, \quad \forall \epsilon \geq e > 0$$

2. Dacă  $k \leq \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right)$ , atunci vectorul  $\hat{\gamma}$  obținut ca soluție a problemei de optimizare (6) satisface:

$$\|\hat{\gamma} - \gamma\|_2^2 \leq \frac{(\epsilon + e)^2}{1 - \mu(4k - 1)}, \quad \forall \epsilon \geq e > 0$$

3. Dacă  $k \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{e}{|\gamma_k|}$ , unde  $\gamma_k$  este cel mai mic dintre cei  $k$  coeficienți nenuli ai lui  $\gamma$ , atunci vectorul  $\hat{\gamma}$  obținut cu algoritmul Orthogonal Matching Pursuit (OMP) [16], [17] satisface:

$$\|\hat{\gamma} - \gamma\|_2^2 \leq \frac{e^2}{1 - \mu(k - 1)}$$

În relațiile de mai sus,  $\epsilon$  reprezintă toleranța acceptată în problemele de optimizare (5) și (6), iar  $e$  este energia zgomotului. Cele două teoreme arată că valori mici ale coerenței mutuale sunt de dorit, întrucât permit relaxarea condiției de raritate a vectorilor care pot fi recuperați în mod garantat, în limitele toleranței impuse.

Subliniem faptul că coerența mutuală a unui dicționar este o condiție suficientă, nu și necesară pentru recuperare. Ea poate fi însă calculată foarte ușor, spre deosebire de valoarea *spark* sau constantele RIP și NSP, ceea ce reprezintă un mare avantaj în practică.

#### 1.4.6. Relații între spark, RIP, NSP și coerența mutuală

O serie de relații cunoscute între condițiile și constantele prezentate mai sus sunt sumarizate în teorema următoare din [13].

**Teoremă.** [13] Fie o matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$  cu *spark*-ul  $\sigma$ , constantele RIP  $\delta_k$ , constanta NSP  $C$  și coerența mutuală  $\mu$ . Sunt valabile următoarele relații:

1.  $\sigma \geq 1 + \frac{1}{\mu}$
2.  $A$  satisface proprietatea RIP de ordin  $k$  cu  $\delta_k = k\mu, \forall k < \frac{1}{\mu}$
3. Dacă  $A$  satisface proprietatea RIP de ordin  $2k$  cu  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ , atunci  $A$  satisface proprietatea NSP de ordin  $2k$  cu constanta  $C = \frac{\sqrt{2}\delta_{2k}}{1-(1+\sqrt{2})\delta_{2k}}$ .

#### 1.4.7. Utilizarea matricilor aleatoare în achiziția comprimată

Pentru o matrice generală  $A$  oarecare, calcularea *spark*-ului, a constantelor RIP sau NSP reprezintă probleme *NP-hard* [11], așadar nu este posibilă utilizarea directă a acestor proprietăți pentru a verifica practic dacă o matrice de achiziție este "bună" pentru achiziția comprimată. Cu toate acestea, o serie de rezultate fundamentale arată că matricile aleatoare, în care elementele reprezintă variabile aleatoare independente și identic distribuite după o lege de distribuție normală, Bernoulli sau altele, au o probabilitate foarte mare de a satisface proprietatea RIP dacă numărul de linii este suficient de mare.

Fundamentul teoretic al acestor rezultate îl reprezintă fenomenul cunoscut sub numele de *concentrarea măsurii*, constând în aceea că, pentru un vector fixat  $x \in \mathbb{R}^n$ , norma  $\ell_2$  a proiecțiilor sale pe subspații aleatoare constituie o variabilă aleatoare ale cărei valori sunt puternic concentrate în jurul valorii  $\|x\|_2$ . Fenomenul de concentrare a măsurii este binecunoscut în domeniul matematicii. Pentru rigurozitate, utilizăm definiția următoare din [18]:

**Definiție.** Fie  $r$  o variabilă aleatoare în spațiul  $\Omega$  respectând distribuția de probabilitate  $\rho$ . Construim o matrice aleatoare  $\Phi$  de dimensiune  $m \times n$ , compusă din realizări independente ale variabilei aleatoare  $r$ . Spunem că densitatea de probabilitate  $\rho$  satisface inegalitatea de concentrare a măsurii dacă pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$  avem:

$$P\left(\left|\frac{n}{m} \|\Phi x\|_2^2 - \|x\|_2^2\right| \geq \epsilon \|x\|_2^2\right) \leq 2e^{-mc_0(\epsilon)}, \quad 0 < \epsilon < 1, \quad (17)$$

unde probabilitatea se ia asupra întregului set de matrici posibile  $\Phi$  de dimensiune  $m \times n$ , și  $c_0(\epsilon)$  este o constantă ce depinde numai de  $\epsilon$  astfel încât  $c_0(\epsilon) > 0, \forall \epsilon \in (0,1)$ .

Această definiție implică faptul că, pentru orice matrice aleatoare  $\Phi$  conținând realizări independente ale unei variabile aleatoare distribuită după legea  $\rho$ , proiecția oricărui vector fixat  $x$  pe subspațiul definit de  $\Phi$ ,  $\Phi x$ , are norma concentrată în jurul valorii inițiale a normei lui  $x$ . Cu alte cuvinte, probabilitatea ca norma rezultată să varieze cu un factor mai mare decât  $\pm\epsilon$  este limitată superior de o exponențială în  $\epsilon$ . Factorul  $\frac{n}{m}$  este necesar doar pentru a normaliza valoarea normei, întrucât norma  $\ell_2$  a lui  $\Phi x$  este definită pe un spațiu vectorial  $\mathbb{R}^m$ , în timp ce norma  $\ell_2$  a lui  $x$  este definită în  $\mathbb{R}^n$ .

Printre distribuțiile care satisfac inegalități de concentrare a măsurii de numără distribuția normală și distribuția Bernoulli, după cum se arată în teorema următoare din [19].

**Teoremă.** [19] Fie  $R$  o matrice de dimensiune  $m \times n$  compusă din variabile aleatoare independente  $r_{ij}$ , distribuite după una din următoarele distribuții:

$$r_{ij} = \begin{cases} \mathcal{N}(0,1) \\ +1 & \text{cu probabilitatea } 1/2 \\ -1 & \text{cu probabilitatea } 1/2 \\ +1 & \text{cu probabilitatea } 1/6 \\ 0 & \text{cu probabilitatea } 2/3 \\ -1 & \text{cu probabilitatea } 1/6 \end{cases}$$

Pentru  $\forall \epsilon > 0$  și pentru orice vector  $v \in \mathbb{R}^n$  sunt valabile următoarele relații:

$$P(\|Rv\|_2^2 \leq (1 + \epsilon)k/n) < e^{-\frac{m}{2}(\epsilon^2/2 - \epsilon^3/3)} \quad (18)$$



$$P(\|Rv\|_2^2 \leq (1 - \epsilon)k/n) < e^{-\frac{m}{2}(\epsilon^2/2 - \epsilon^3/3)} \quad (19)$$

Pentru aceste trei distribuții, concentrarea măsurii este satisfăcută cu constanta  $c_0(\epsilon) = \frac{\epsilon^2/2 - \epsilon^3/3}{2}$ .

Pentru matrici aleatoare compuse din variabile aleatoare cu o distribuție care îndeplinește condiția de concentrare a măsurii, se poate demonstra că satisfac proprietatea RIP cu mare probabilitate. Acest lucru este statuat în teorema de mai jos din [18].

**Teoremă.** [18] Date fiind  $m$ ,  $n$  și  $\delta$  cu  $0 < \delta < 1$ , dacă distribuția de probabilitate care generează matricea  $\Phi$  satisface relația de concentrare a măsurii (17), atunci există constantele  $c_1$  și  $c_2$  depinzând numai de  $\delta$  astfel încât  $\Phi$  satisface RIP cu constanta aleasă  $\delta$  pentru toți  $k < c_1 m / \log(n/k)$  cu probabilitatea  $\geq 1 - e^{-c_2 m}$ .

Această teoremă arată că o matrice aleatoare creată pe baza unei distribuții care respectă concentrarea măsurii permite recuperarea semnalelor rare, cu mare probabilitate. Se poate rescrie  $k < c_1 m / \log(n/k)$  sub forma  $m > 1/c_1 \cdot k \log(n/k)$ , ceea ce înseamnă că numărul de proiecții necesare (numărul de linii al matricei de achiziție) pentru recuperarea semnalelor de raritate  $k$  este de ordinul  $\mathcal{O}(k \log(N/k))$ . Astfel, se poate recupera un semnal de raritate  $k$  dintr-un vector de măsurare de dimensiune  $\mathcal{O}(k \log(N/k))$ . Practic, aceasta este limita minimă a complexității sub care nu se poate coborî, întrucât chiar dacă pozițiile coeficienților nenuli ar fi cunoscute în avans ar fi nevoie tot de minim  $k \log(N/k)$  unități de memorie pentru a le stoca.

În practică, probabilitatea recuperării cu succes a semnalelor de raritate  $k$  în funcție de  $m$  (numărul de măsurători),  $n$  (dimensiunea semnalelor) și  $k$  (raritatea) prin minimizare  $\ell_1$  a fost analizată în [20] prin experimente numerice extinse. Rezultatele arată o tranziție surprinzător de abruptă între domeniul parametrilor în care recuperarea cu succes este foarte probabilă și domeniul unde aceasta este practic imposibilă, cel puțin în cazul asimptotic în care dimensiunea semnalelor este foarte mare (în cazul finit dimensional tranziția este mai puțin abruptă). Întrucât marginile domeniului unde recuperarea are loc cu succes sunt relativ bine delimitate, se poate estima cu un grad bun de acuratețe numărul de măsurători necesare, ceea ce este foarte util în aplicații practice.

### **Rezultatele obținute au fost raportate în:**

**[Fira IJARAI 2015]** Adrian Brezulianu, Monica Fira, Marius Daniel Pestina, Compressed Sensing Based Encryption Approach for Tax Forms Data, International Journal of Advanced Research in Artificial Intelligence (IJARAI), Volume 4 Issue 11, 2015

**[Fira EHB 2015]** Fira Monica, Applications of Compressed Sensing: Compression and Encryption, International Conference on e-Health and Bioengineering, EHB 2015, 19-21 Noiembrie, Iasi, Romania

**[Feraru EHB 2015]** Silvia Monica Feraru, Marius Dan Zbancioc, Roxana Mihaela Barbu, Cristina Maria, Using the Decision Tree for Emphasizing the Benefits of Associating Antioxidants in the Therapy of the Metabolic Syndrome, International Conference on e-Health and Bioengineering, EHB 2015, 19-21 Noiembrie, Iasi, Romania

**[Eva EHB 2015]** Oana-Diana Eva și Anca Mihaela Lazăr, Channel Selection for Motor Imagery Paradigm - an Itakura Distance based Method, International Conference on e-Health and Bioengineering, EHB 2015, 19-21 Noiembrie, Iasi, Romania

## Obiectivul 1 - Studiul aspectelor referitoare la procesarea semnalelor folosind conceptul de compressed sensing – CONTINUARE IN ANUL 2016

In [CLEJU 2016] se propune reformularea modelului de analiză și a problemei aferente de reconstrucție a semnalului ca un caz particular al modelului de sinteză, ceea ce permite tratarea unitară a celor două teorii și, din punct de vedere practic, utilizarea algoritmilor existenți pentru modelul de sinteză (mult mai numeroși și mai bine dezvoltati) și pentru cazul modelului de analiză.

Factorul cheie care face posibilă achiziția comprimată a semnalelor îl reprezintă existența descompunerilor rare. În termeni de teoria semnalelor, acest lucru înseamnă că semnalele respective aparțin unei uniuni de subspații de dimensiuni reduse, comparativ cu dimensiunea semnalului însuși. Această "localizare" a semnalelor într-o zonă foarte restrictivă din spațiul vectorial permite identificarea acestora dintr-un număr redus de eșantioane / măsurători, ceea ce permite în principiu posibilitatea reconstrucției.

Generalizând această interpretare, există în literatura de specialitate direcții care explorează noi modele de raritate, adică noi tipuri de a defini subspații sau uniuni de subspații de semnale, pentru care se poate adapta teoria achiziției comprimate. Unul dintre aceste modele inovative este reprezentat de modelul de raritate de analiză, numit și *co-raritate* ("cosparsity" în limba engleză). Spre deosebire de modelul clasic de raritate, denumit *raritate de sinteză*, care prevede că un semnal  $x$  este construit dintr-un număr limitat de atomi dintr-un dicționar:

$$x = D\gamma_S, \text{ cu } \|\gamma_S\|_0 = k,$$

modelul rarității de analiză specifică faptul că semnalul  $x$  produce un vector rar atunci când este analizat cu un operator liniar  $\Omega$ :

$$\gamma_A = \Omega x, \text{ with } \|\gamma_A\|_0 = N - l.$$

În acest model semnalul  $x$  este ortogonal pe  $l$  linii ale matricii  $\Omega$ , așadar aparține complementului ortogonal al subspațiului generat de aceste linii. Cele două modele sunt echivalente pentru cazul în care dicționarul  $D$  este o bază, dar sunt diferite atunci când acesta este supracomplet.

În literatura de specialitate se demonstrează faptul că un semnal necunoscut  $x$ , despre care se cunoaște că respectă modelul de raritate de analiză, poate fi achiziționat comprimat și reconstruit printr-o procedură similară cu cea pentru modelul uzual de sinteză, în condiții asemănătoare. Principalele rezultate sunt sumarizate mai jos.

### ECHIVALENȚA CELOR DOUĂ PROBLEME DE RECONSTRUCȚIE

**[Teorema 1]** Problema de reconstrucție a semnalului în modelul de analiză:

$$x = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|\Omega x\|_p \text{ cu } \|y - Mx\|_2^2 \leq \epsilon,$$

pentru  $\epsilon \geq 0$ , este echivalentă cu reconstrucția conform modelului de sinteză cu o constrângere suplimentară:

$$\begin{aligned} x &= D \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \|\gamma\|_p \text{ cu} \\ &\|y - MD\gamma\|_2^2 \leq \epsilon \text{ și} \\ &0 = P\gamma \end{aligned}$$

unde  $D = \Omega^\dagger$  și liniile matricii  $P$  formează o bază pentru spațiul nul al dicționarului  $D$ .

### Garanții teoretice pentru reconstrucție

Se demonstrează că două garanții teoretice din literatură pentru reconstrucția cu succes a semnalelor conform modelelor de sinteză și de analiză, prin metoda minimizării normei  $\ell_1$ , sunt echivalente.

**[Teorema 2]** Condiția reconstrucției cu succes pentru modelul de analiză:

$$\begin{aligned} \sup_{x:0=\Omega_A x} |\langle \Omega_A^c z, \operatorname{sign}(\Omega_A^c x) \rangle| &< \|\Omega_A^c z\|_1, \\ \forall z \in \operatorname{Null}(M), z \neq 0 \end{aligned}$$

este echivalentă cu condiția NSP ("Null SPace Property"):

$$\|\eta_T\|_1 < \|\eta_{T^c}\|_1, \forall \eta \in \operatorname{Null}(D),$$

pentru sistemul rezultat în urma echivalenței de mai sus.

Pentru reconstrucția semnalelor de analiză cu algoritmul Orthogonal Matching Pursuit aplicat sistemului echivalent de mai sus, se găsește o condiție suficientă pentru succes.

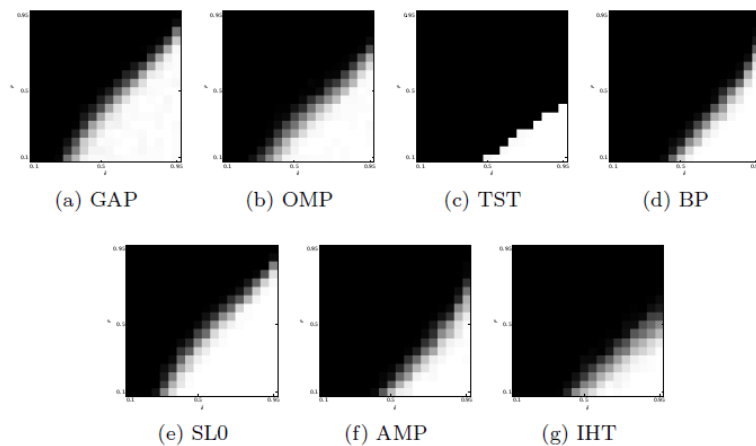
**[Teorema 3]** O condiție suficientă pentru reconstrucția cu succes folosind algoritmul Orthogonal Matching Pursuit aplicat asupra sistemului rezultat în urma echivalenței de mai sus este:

$$\|D_{T^c}^* r\|_\infty < \|D_T^* r\|_\infty, \forall r \in \operatorname{Span}(D_T).$$

### REZULTATE PRACTICE

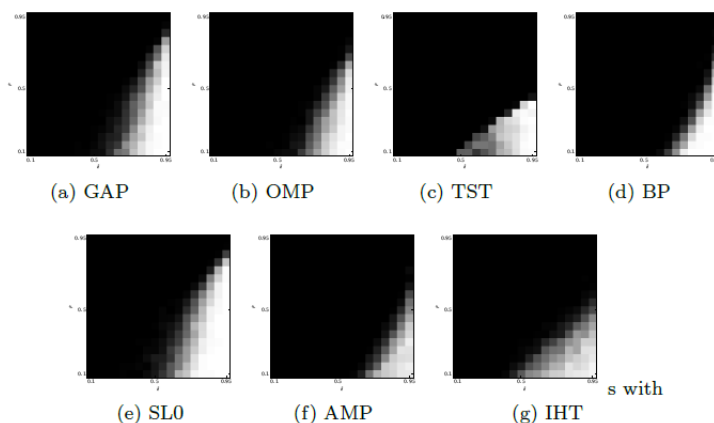
În urma reformulării modelului de analiză ca un caz particular al celui de sinteză, pot fi utilizați la reconstrucție algoritmi uzuali din modelul de sinteză. Acest lucru este verificat practic prin simulări, care arată faptul că rata de succes în acest fel este comparabilă cu cea a unui algoritm nativ pentru modelul de analiză, Greedy Analysis Pursuit (GAP). Rezultate sunt prezentate grafic sub forma unor grafice de fază de tranziție ("phase transition plots")

Pentru achiziția fără zgomot:



**Fig. 1** Analysis-based sparse recovery from noiseless measurements: fraction of cospase signals reconstructed with Greedy Analysis Pursuit (a) and with synthesis-based algorithms on the synthesis equivalent system with explicit constraint ( ( b), ( c), ( d), ( e), ( f), ( g) ). White indicates 100% recovered signals, black 0%. All synthesis-based algorithms are capable of analysis recovery, many of them with performance similar to GAP.

Pentru achiziția cu zgomot:



**Fig. 2** Analysis-based sparse recovery from noisy measurements: fraction of cospase signals reconstructed with Greedy Analysis Pursuit (a) and with synthesis-based algorithms on the synthesis equivalent system with explicit constraint ( ( b), ( c), ( d), ( e), ( f), ( g) ). White indicates 100% recovered signals, black 0%. Note SL0 slightly outperforming GAP.

## CONCLUZII

Modelul de raritate de analiză poate fi considerat ca un caz particular al modelului de sinteză, cu o constrângere liniară suplimentară. Acest lucru permite tratarea unitară a celor două teorii, echivalența multor rezultate teoretice, precum și utilizarea algoritmilor uzuali de reconstrucție de sinteză și pentru cazul modelului de analiză, cu rezultate similare.

### Rezultatele obținute au fost raportate în:

[Cleju 2016] N. Cleju, *Analysis Sparsity With Explicit Orthogonality Constraint*, Acta Applicandae Mathematicae, Ed. Springer, In evaluare, trimis in 28.07.2016 (revista cu factor de impact 0.853)

## Obiectivul 2 - Proiectarea unor metode noi de generare a matricei de masuratori utilizata

### A2.1. - Metode de optimizare a matricei de masuratori

### A2.2.- Influenta matricei de masuratori in achizitia comprimata

#### Introducere

Matricea de achiziție trebuie să îndeplinească o serie de criterii pentru a putea permite recuperarea cu succes a semnalelor achiziționate. Principiul de bază este ce al incoerenței cu baza sau dicționarul supracomplet utilizat  $D$ : o matrice de achiziție "bună" trebuie să aibă liniile (vectorii de proiecție) incoerenți cu coloanele (atomii) dicționarului  $D$  [SparsAndIncoh\_Candes\_2007]. Prin termenul de incoerență se înțelege faptul că produsele scalare ale vectorilor de proiecție cu toți atomii dicționarului trebuie să aibă valori mici, dar nenule. În acest fel, un semnal cu reprezentare rară, care este compus dintr-un număr limitat de atomi, va avea o corelație nenulă cu toți vectorii de proiecție.

Necesitatea incoerenței poate fi înțeleasă din următorul exemplu. Un vector de proiecție care este foarte corelat cu un atom al dicționarului, și în consecință puțin corelat cu ceilalți, nu va aduce o informație utilă decât pentru semnalele rare care conțin acel atom; în acest caz, proiecția semnalului pe acest vector are o valoare semnificativă. Pentru toate celelalte semnale, însă, vectorul de proiecție va produce un rezultat aproape nul, care nu este foarte util în reconstrucție, pentru că nu aduce alte informații despre compoziția semnalului căutat. Dimpotrivă, dacă vectorii de proiecție sunt incoerenți cu atomii dicționarului, ei vor produce corelații mai mici dar nenule cu toate semnalele rare, indiferent de atomii care intră în compoziția acestora. Fiecare vector de proiecție va captura astfel o mică parte din informație despre semnalul achiziționat, dar ansamblul tuturor măsurătorilor, reunite în vectorul de măsuratori obținut, va fi mai caracteristic semnalului achiziționat și deci va permite mai ușor identificarea acestuia.

Acest rezultat fundamental în ceea ce privește incoerența matricii de achiziție cu dicționarul utilizat  $D$  conduce la două direcții generale în ceea ce privește construcția matricii de achiziție, îndeosebi în cazul cel mai studiat în care  $D$  este o bază ortogonală. Prima abordare este aceea de a utiliza matrici aleatoare, ale căror elemente sunt variabile aleatoare independente și identic distribuite (i.i.d) cu anumite distribuții, cum ar fi distribuția normală sau cea Bernoulli. Se poate demonstra că o astfel de matrice aleatoare este, cu mare probabilitate, incoerentă cu orice bază sau dicționar fixat în prealabil. O a doua abordare întâlnită în cercetare este de a utiliza vectori de proiecție extrași dintr-o bază ortogonală despre care se știe că este incoerentă cu cea utilizată în descompunerile rare ale semnalelor de interes. Acest lucru necesită ca baza sau dicționarul  $D$  utilizat în reprezentările rare să fie cunoscute în avans, dar poate conduce la algoritmi de reconstrucție mai rapizi, dacă vectorii de proiecție sunt selectați dintr-o bază pentru care există algoritmi rapizi de transformare (de ex. Fourier, Wavelet). De exemplu, baza Fourier sau Wavelet este incoerentă cu baza canonică. Ca atare, semnalele care sunt rare direct în domeniul timp (în baza canonică) pot fi achiziționate cu vectori din baza Fourier sau Wavelet, sau, vice-versa, semnalele cu reprezentare rară în domeniul Fourier sau Wavelet pot fi achiziționate eficient prin eșantionare în timp (proiecții pe vectori din baza canonică).

În cazul dicționarelor supracomplete, se poate întâmpla ca atomii să prezinte corelații semnificative între ei. Acest lucru este valabil în special pentru dicționarele obținute în urma unui proces de învățare, adică optimizate pentru anumite clase de semnale. În acest caz, proprietatea de incoerență nu mai este atât de ușor de satisfăcut, și matricea de achiziție trebuie să poată fi adaptată pentru dicționarul folosit. Pentru acest scop, au fost propuși în literatura de specialitate o serie de algoritmi [EladOptimProj; @Xu; @Duarte].

În continuare, se vor folosi următoarele notații. Semnalul original este  $x \in \mathbb{R}^n$ , care are o descompunere rară în dicționarul  $D$  de dimensiune  $n \times N$ . Descompunerea este notată cu  $\gamma$ . Matricea de achiziție este  $P$ , și are dimensiunea  $m \times n$ . Dicționarul efectiv este  $D_e = PD$ , cu dimensiune  $m \times N$ . Se definește matricea Gram a dicționarului  $D$  ca fiind  $G = D^T D$ , iar matricea Gram a dicționarului efectiv  $D_e$  ca  $G_e$ ; aceasta din urmă este numită și matricea Gram efectivă.

#### Matricea de achiziție și coerența mutuală

O abordare des utilizată pentru a asigura unicitatea reconstrucției rare a unui semnal se bazează pe coerența mutuală a dicționarului efectiv  $D_e = PD$  [OptimSpReprDonoho2003;

[@Gribonval2003; @TroppGreed]. Coerența mutuală a unui dicționar se definește ca fiind corelația maximă între oricare doi atomi ai dicționarului, în valoare absolută. Rezultate teoretice din literatura de specialitate arată ca este de dorit a avea un dicționar cu o valoare cât mai mică a coerenței mutuale, întrucât acest lucru crește mulțimea semnalelor ce pot fi reconstruite cu succes. Ca atare, majoritatea algoritmilor de optimizare urmăresc minimizarea acestui parametru.

## Algoritmi de optimizare existenți în literatură

### Algoritmul Elad

Algoritmul prezentat în [@EladOptimProj], pe care îl vom numi Algoritmul Elad, urmărește reducerea unei valori derivate din coerența mutuală, respectiv coerența mutuală mediată  $t$ ,  $\mu_t$ , a dicționarului efectiv  $D_e$ . Aceasta se definește ca fiind valoarea medie a celor mai mari valori din afara diagonalei principale a matricii Gram:

$$\mu_t(D_e) = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} (g_{ij} > t) |g_{ij}|}{\sum_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} (g_{ij} > t)}$$

Parametrul  $t$  reprezintă fie un prag absolut, fie un procentaj din valoarea maximă, și indică valorile care sunt considerate în calculul mediei.

Motivul pentru care se minimizează coerența mutuală mediată  $\mu_t$  în locul coerenței mutuale  $\mu$  este acela că aceasta din urmă reprezintă o garanție pentru cazul cel mai defavorabil. În practică, în condiții ceva mai relaxate asupra coerenței mutuale decât cele impuse de garanțiile teoretice din literatură, aproape toate semnalele rare vor fi în continuare reconstruite corect, cu excepția unei fracțiuni foarte mici de semnale nerecuperabile. Din acest motiv, în [@EladOptimProj] se argumentează că coerența mutuală mediată a celor mai mari valori este o măsură mai potrivită pentru a descrie performanțele medii ale dicționarului efectiv.

Ideea de bază a algoritmului este de a reduce în mod iterativ valorile din afara diagonalei principale a matricii Gram efective  $G_e$ , în același timp menținând rangul matricii egal cu  $m < N$ . La fiecare iterație  $k$  se aplică o funcție de micșorare  $f_t(u)$  asupra elementelor din afara diagonalei principale a matricii Gram de la pasul curent,  $G_e^{(k)}$ , funcție care micșorează elementele cu valori mari dar păstrează neschimbate valorile mai reduse. Procesul de micșorare conduce însă în general la o matrice de rang maxim, care nu este semipozitiv definită (SPD), în timp matricea Gram a oricărui dicționar  $m \times N$  trebuie să fie SPD și de rang maxim  $m$ . Prin urmare, algoritmul găsește cea mai bună aproximare de rang redus  $m$  pentru matricea Gram rezultată în urma micșorării, apoi extrage matricea rădăcină pătrată  $D_k$ , care reprezintă un dicționar efectiv mai bun decât cel inițial. Matricea de achiziție la pasul  $k$ , notată  $P_k$ , se găsește apoi ca fiind matricea care aduce dicționarul original  $D$  cât mai aproape de dicționarul efectiv dorit  $D_k$ , adică  $P = D_k D^\dagger$ , (unde  $D^\dagger$  indică pseudoinversa Moore-Penrose a unei matrici).

Funcția de micșorare se alege empiric de forma următoare, unde parametrul  $\alpha$  reprezintă factorul de micșorare.

$$f_t(u) = \begin{cases} u & \|u\| \leq \alpha t \\ \alpha t \cdot \text{sgn}(u) & \alpha t \leq \|u\| \leq t \\ \alpha u & t \leq \|u\| \end{cases}$$

Algoritmul complet este prezentat mai jos, și necesită ca date de intrare dicționarul  $D$ , o matrice de achiziție inițială  $P_0$  și funcția de micșorare  $f_t(u)$ . La terminarea algoritmului se obține matricea de achiziție optimizată  $P$ .

Pașii algoritmului Elad sunt următorii:

1. Se calculează dicționarul efectiv  $D_e = P_k \cdot D$ , se normalizează coloanele sale, se calculează matricea sa Gram  $G_e^{(k)} = D_e^T \cdot D_e$
2. Se aplică funcția de micșorare asupra matricii  $G_e^{(k)}$ ,  $\tilde{G}_e^{(k)} = f(G_e^{(k)})$
3. Se găsește cea mai bună aproximare de rang  $m$  a matricii  $\tilde{G}_e^{(k)}$ , folosindu-se descompunerea SVD.
4. Se extrage rădăcina  $D_k$ , unde  $\tilde{G}_e^{(k)} = D_k^T \cdot D_k$
5. Se găsește  $P_k$  care minimizează  $\|D_k - P_k D\|_F$ , rezultând  $P_k = D_k D^\dagger$

De obicei, algoritmul este rulat cu un număr predefinit de iterații. Convergența algoritmului însă nu este garantată, motiv pentru care criteriul recomandat pentru terminare este de a verifica valoarea coerenței mutuale mediate care se obține după fiecare iterație, o creștere semnificativă a acesteia atrăgând după sine terminarea algoritmului.

#### Reformulare ca problemă de optimizare

Pentru o putea face o comparație riguroasă a algoritmilor prezentați, este util a fi reformulați sub forma unor probleme de optimizare. În acest sens, algoritmul Elad poate fi considerat un algoritm pentru soluționarea următoarei probleme de optimizare cu constrângeri:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|G_e - I_N\|_\infty \\ \text{a.î.} \quad & G_e \succeq 0 \\ & \text{rank}(G_e) = m \\ & \text{diag}(G_e) = 1 \end{aligned}$$

Într-adevăr, la fiecare iterație sunt micșorate cele mai mari valori din afara diagonalei principale ale matricii  $G_e$ , iar apoi sunt impuse condițiile de rang și de egalitate cu 1 pe diagonala principală (normarea atomilor). Reducerea valorilor celor mai mari din afara diagonalei principale înseamnă, de fapt, reducerea normei  $\ell_\infty$  a diferenței  $\|G_e - I_N\|_\infty$ . Astfel, algoritmul Elad poate fi considerat o metodă iterativă pentru minimizarea cu constrângeri a unei probleme de normă  $\ell_\infty$ .

#### Algoritmul Xu

Algoritmul prezentat în [Xu], care va fi numit de aici încolo *Algoritmul Xu*, urmărește să aducă dicționarul efectiv  $D_e$  cât mai aproape de un *dicționar compact echiangular (equiangular tight frame, ETF)*, întrucât un ETF are coerența minimă dintre toate matricile cu aceleași dimensiuni. Prin urmare, algoritmul Xu urmărește să rezolve problema de optimizare:

$$\hat{G}_e = \min_{G \in A_m^n} \|G_e - G\|,$$

unde  $A_m^n$  reprezintă mulțimea matricilor Gram ale tuturor ETF-urilor de dimensiune  $m \times n$ . Această mulțime nefiind convexă, problema nu are o rezolvare conevnabilă, motiv pentru care se înlocuiește cu mulțimea convexă  $\Lambda^n$ :

$$\Lambda^n = \{G \in \mathbb{R}^{n \times n} : G = G^T, \text{diag}(G) = 1, \max_{i \neq j} \|g_{ij}\| < \mu_G\},$$

unde  $\mu_G = \sqrt{\frac{n-m}{m(n-1)}}$  reprezintă o limită inferioară pentru coerența unui ETF de dimensiune  $m \times n$ .

Algoritmul propriu-zis, prezentat mai jos, se bazează pe metoda proiecțiilor alternative, și este foarte similar cu algoritmul Elad.

1. Se calculează dicționarul efectiv  $D_e = P \cdot D$ , se normalizează coloanele sale, și se calculează matricea Gram  $G_e^{(k)} = D_e^T \cdot D_e$
2. Se proiectează  $G_e$  pe mulțimea  $\Lambda^k$ , pe baza următoarei relații:

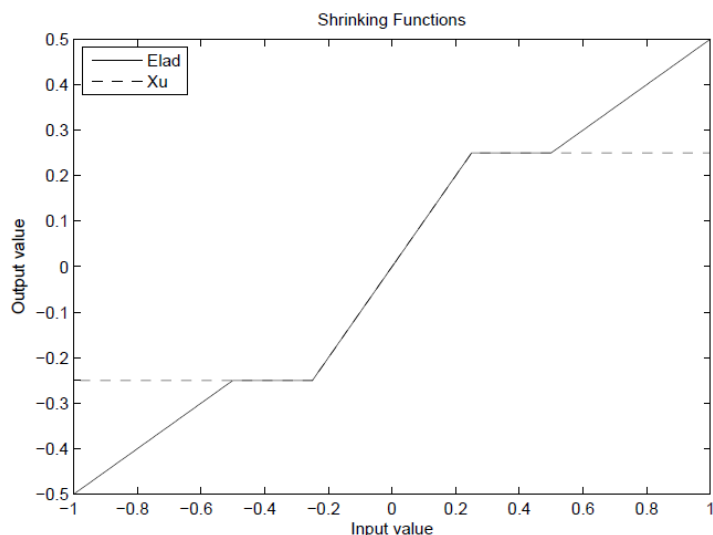
$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ g_{ij} & |g_{ij}| < \mu_G \\ \text{sgn}(g_{ij}) \cdot \mu_G & |g_{ij}| \geq \mu_G \end{cases}$$

3. Noua soluție se alege ca o combinație liniară intermediară între proiecția  $G_p$  de la pasul curent și soluția precedentă:

$$G_k = \alpha G_p + (1 - \alpha) G_{k-1}, 0 < \alpha < 1$$

4. Se actualizează matricea de achiziție  $P$  pe baza factorizării QR cu descompunerea în vectori și valori proprii.

Se observă ca algoritmul Xu este foarte similar cu Algoritmul Elad, în ciuda formulării teoretice diferite. Proiectarea pe mulțimea  $\Lambda^k$  este foarte asemănătoare cu etapa de micșorare a valorilor din Algoritmul Elad, doar cu o funcție de micșorare modificată care limitează toate elementele din afara diagonalei mai mari decât  $\mu_G$ . Cele două funcții de micșorare sunt prezentate în Fig.1 pentru comparație vizuală.



**Fig.1:** Funcțiile de micșorare pentru algoritmi Elad și Xu

Cealaltă diferență a algoritmului Xu este faptul că noua soluția se alege ca un punct intermediar între soluția precedentă și rezultatul proiecției, cu scopul de a crește stabilitatea algoritmului. În afara acestor două diferențe, cei doi algoritmi sunt în esență identici.

#### Reformulare ca problemă de optimizare

La fel ca și algoritmul Elad, și algoritmul Xu poate fi reformulat ca o problemă de optimizare. Se cunoaște faptul că corelația maximă dintre doi atomi este de valoare minimă pentru matrici ETF, dintre toate matricile de aceeași dimensiune [Welch; ETF]. Prin urmare, proiectarea matricii  $G_e$  pe mulțimea matricilor ETF reprezintă același lucru ca minimizarea celor mai mari valori absolute din afara diagonalei principale. Așadar, se poate considera că algoritmul Xu rezolvă aceeași problemă de optimizare cu constrângeri ca și algoritmul Elad:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|G_e - I_N\|_\infty \\ \text{s. t.} \quad & G_e \succeq 0 \\ & \text{rank}(G_e) = m \\ & \text{diag}(G_e) = 1 \end{aligned}$$

Diferența față de acesta din urmă o reprezintă funcția de micșorare modificată.

#### Algoritmul Duarte

Duarte-Carvajalino și Sapiro prezintă în [Duarte] un algoritm diferit pentru găsirea unei matrici de achiziție optimizate pentru un dicționar fixat, precum și o metodă de a optimiza simultan matricea de achiziție și dicționarul. Întrucât considerăm doar cazul unui dicționar fixat, se va analiza aici doar prima metodă, care va fi denumită *Algoritmul Duarte*.

Algoritmul caută matricea de achiziție  $P^*$  care minimizează următoarea mărime:

$$P^* = \underset{P}{\text{argmin}} \|DD^T - DD^T P^T P D D^T\|_F$$

Această problemă de optimizare are soluția de forma:

$$P^* = \Lambda_{1:m}^{-1/2} \cdot U_{1:m}^T,$$

unde  $\Lambda$  și  $U$  provin din descompunerea în vectori și valori proprii a  $DD^T = U\Lambda U^T$ , iar notația  $_{1:m}$  indică restrângerea unei matrici la primele  $m$  linii ale sale. Cu alte cuvinte, considerând o descompunere în valori singulare (SVD) de forma  $D = USV^T$ , matricea de achiziție optimă este dată de primele  $m$  componente principale ale lui  $D$ , scalate cu inversa valorilor singulare corespunzătoare,  $P^* = S_{1:m}^{-1} U_{1:m}^T$ . În consecință, dicționarul efectiv este un dicționar compact (tight frame) definit de restrângerea matricii  $V^T$  la primele  $m$  linii ale sale:

$$D_e = P^* \cdot D = S_{1:m}^{-1} U_{1:m}^T \cdot USV^T = V_{1:m}^T$$

#### Reformulare ca problemă de optimizare

Algoritmul Duarte este diferit de primii doi algoritmi prezentați, pornind de la problema minimizării normei  $\ell_2$ , și nu  $\ell_\infty$ , între cele două matrici:

$$\| I_N - G_e \|_2$$

Apoi, însă, ambii termeni sunt multiplicați cu  $D$  și  $D^T$ , rezultând o problemă de optimizare modificată:

$$\| G - DG_e D^T \|_2.$$

Aceasta din urmă este o problemă mai relaxată decât prima, întrucât matricea "țintă"  $G$  are acum doar rangul  $n$ , mai mic decât cea originală  $I_N$  de rang  $N$ .

Este posibilă reformularea algoritmului Duarte într-un mod asemănător primilor doi algoritmi, ca fiind foarte similar cu soluționarea următoarei probleme de optimizare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \| G_e - G \|_2 \\ \text{a.î.} \quad & G_e \succeq 0 \\ & \text{rank}(G_e) = m \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, se dorește aducerea matricii  $G_e$  cât mai aproape de  $G$ , sub constrângerea de a avea rangul  $m$  și de a rămâne semipozitiv definită.

Soluția acestei probleme de optimizare este practic identică cu soluția algoritmului Duarte în formularea originală. Considerând o descompunere SVD  $D = USV^T$ , soluția se obține prin păstrarea doar a primilor  $m$  vectori singulari stânga ai  $D$ , împreună cu valorile lor singulare:

$$P^* D = S_{1:m} * V_{1:m}^T.$$

Matricea de achiziție optimă rezultă astfel de forma:

$$P^* = U_{1:m}^T.$$

Singura diferență față de soluția algoritmului Duarte în formularea sa inițială este ca vectorii de proiecție sunt de normă 1, în timp ce în primul caz sunt scalați cu inversul valorilor singulare. Scalarea vectorilor de proiecție nu este însă un factor esențial în matricea de achiziție, și în plus normarea vectorilor poate fi o abordare mai robustă în practică. Prin urmare, se pot considera cele două formulări ca fiind aproape echivalente.

**În [Fira IJACSA 2016] este prezentată o analiză comparativă a rezultatelor obținute folosind mai multe tipuri de matrici de proiecție și un mega-dictionar pentru semnale EEG detectare comprimat. Pentru evaluarea metodei propuse am folosit setul de date de la Competition BCI III 2005 - P300 Spelling.**

Ca și matrice de proiecție am testat trei tipuri de matrici, și anume:

- Matrice Bernoulli cu elemente de  $-1, 0$  și  $1$
- Matrice Random
- Matrice optimizată funcție de dictionar – produsul dintre o matrice random și transpusa dictionarului folosit la reconstrucție

Pentru a construi dictionarul am folosit semnalele EEG de test de la pacientul B și pentru testarea metodei am folosit semnalele EEG de test de la același subiect.

În Tabelul 1 sunt prezentate rezultatele de clasificare din paradigmă de spelling obținute cu sursele castigatorului competiției, obținute pe semnalele EEG originale, adică care nu au suferit nici o modificare. Aceste rezultate sunt importante pentru că vor reprezenta referința noastră pentru comparații viitoare. Se poate observa că se obține o rată medie de clasificare de 89.37%, cu o mare majoritate de clasificare de 93%.

*Tabel 1. – Performanțele de clasificare exprimate în % în paradigmă de spelling P300 obținute pe datele inițiale (pentru subiectul B) și sursele soft ale castigatorului competiției*

| P300 Spelling - classification performance %                                  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Original data – uncompressed and classified by A. Rakotomamonjy and V. Guigue |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 36  | 53 | 61 | 68 | 73 | 78 | 83 | 82 | 84 | 88 | 91 | 93 | 90 | 90 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93                                      | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 |    |
| 93  | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93                                      | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 |
|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | <b>Average Classification% = 89.37%</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |

Tabelele 2- 4 prezintă rezultatele de clasificare pentru toate cele 64 de canale pentru o compresie de 10:1 și respective 5:1, pentru subiectul B și pentru matrice de tip Bernoulli vs.





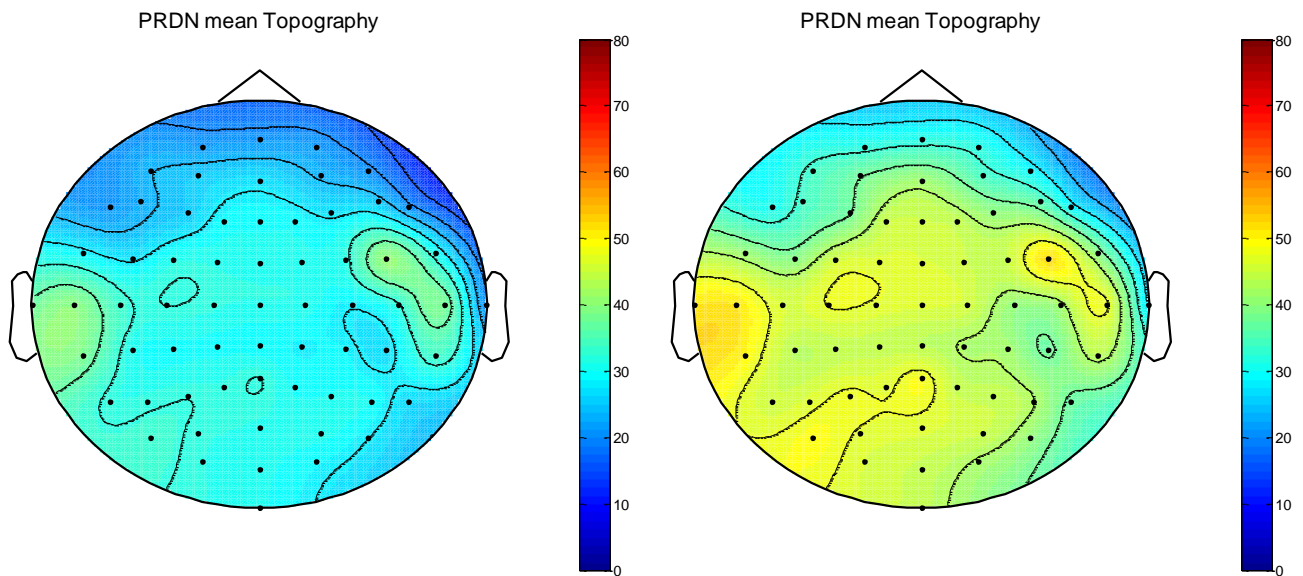


Figure 2. – Topologia erorilor exprimate ca PRDN pentru semnalele achizitionate comprimat (CR = 5:1 si respective CR = 12:1)

Rezultatele obtinute cu matrice de tip Bernoulli sunt comparabile cu cele obtinute cu matrice random. Dar cand se utilizeaza matrice optimizata functie de dictionar, rezultatele sunt mult imbunatatite, fiind comparabile cu rezultatele obtinute cu semnale originale. Daca se face referire strict la rata de clasificare in paradigma de spelling, atunci ratele de clasificare obtinute cu matrice optimizata sunt chiar imbunatatite pentru CR = 10: 1 si 5: 1.

Pentru a evalua rezultatele obtinute din punct de vedere cantitativ al erorilor, am folosit si PRDN. Astfel ca tot utilizarea matricei de achizitie optimizata functie de dictionar a avut cele mai mici erori.

Astfel, cele mai bune rezultate din punct de vedere al erorilor de clasificare in cadrul paradigmei de spelling s-au inregistrat pentru compresii CR = 5:1 si respective CR = 10:1, cand ratele de clasificare obtinute au fost 90% respective 92% (fata de semnalul original cand s-a obtinut 89%). In termini de eroare exprimate ca PRDN s-a obtinut PRDN = 29.77 pentru o compresie de CR = 5:1 si PRDN = 42.32 pentru CR = 10:1

Concluziile sunt ca matricea de achizitie optimizata functie de dictionarul folosit la reconstuctie conduce la rezultate imbunatatite fata de matricile standard de tip random sau Bernoulli.

### **Rezultatele obtinute au fost raportate în:**

**[Fira IJACSA 2016]** Monica Fira, "Compressed Sensing of Multi-Channel EEG Signals: quantitative and qualitative evaluation with Speller Paradigm", International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA), Vol. 7, No. 6, 2016 (revista indexata ISI - Thomson Reuters)

### Obiectivul 3 - Proiectarea unor dictionare specific semnalelor medicale de tip ECG si EEG

#### A3.1- Dictionare particulare specific semnalelor biomedicale de tip ECG si EEG

#### A3.2- Particularitati privind achizitia de tip CS a semnalelor biomedicale ECG cu patologii

#### A3.3 Particularitati privind achizitia de tip CS a semnalelor de tip EEG; Dictionare specific

In general, semnalele biomedicale nu prezinta o buna sparsitate in dictionare standard de tip wavelet, DCT, DST, etc. De aceea, de cele mai multe ori in cazul semnalelor de tip EEG sau ECG se prefer construirea unui dictionare specifice semnalului, care sa tina cont de statistica semnalului sau de elementele repetitive din semnal.

O analiza a posibilitatii utilizarii dictionarelor standard de tip wavelet, pentru semnale de tip ECG, este prezentata in lucrarea [FIRA EHB 2015] sis e constata ca pentru rate de compresie de peste 5:1 calitatea semnalului reconstruit nu mai este multumitoare.

*Tabel - Rezultate de compresie si reconstructie pentru CR = 4:1 cu dictionare wavelet [FIRA EHB 2015]*

| Dictionary      | CR         | PRD         | PRDN         | RMS          |
|-----------------|------------|-------------|--------------|--------------|
| Beylkin         | 4:1        | 1.80        | 10.31        | 15.51        |
| <b>Coiflet3</b> | <b>4:1</b> | <b>1.45</b> | <b>8.32</b>  | <b>12.52</b> |
| Coiflet4        | 4:1        | 2.23        | 12.76        | 19.20        |
| Coiflet5        | 4:1        | 1.89        | 10.83        | 16.30        |
| Daubechies8     | 4:1        | 1.71        | 9.79         | 14.73        |
| Daubechies10    | 4:1        | 2.18        | 12.47        | 18.76        |
| Daubechies12    | 4:1        | 2.30        | 13.16        | 19.80        |
| <b>Haar</b>     | <b>4:1</b> | <b>4.05</b> | <b>23.11</b> | <b>34.77</b> |
| Vaidyanathan    | 4:1        | 1.94        | 11.12        | 16.73        |

#### A3.1- Dictionare particulare specific semnalelor biomedicale de tip ECG si EEG

Semnalul ECG este un semnal care prezinta o pseudo-ciclicitate a complexului QRS si a undelor P si T. Astfel, in cazul semnalului ECG de obicei se speculeaza aceasta repetabilitate a undelor. Semnalul EEG este un semnal putin mai complicat, deoarece nu prezinta elemente de repetabilitate clara, cel putin aceste elemente nu se vad la o inspectie a semnalului in domeniul timp. Semnalul EEG este alcatuit in principal din undele alpha, beta, theta, si delta care au o insemnatate in interpretarea clinica a semnalului EEG, insa aceste unde sunt in domeniul frecventa. CS in varianta clasica este o tehnica de procesare de semnal care in cazul semnalelor biomedicale se aplica la achizitia semnalului, adica in domeniul timp. Acest fapt face dificila aplicarea tehnicii de CS pe semnale de tip EEG, care se preteaza bine la lucrul in domeniul frecventa.

#### A3.2- Particularitati privind achizitia de tip CS a semnalelor biomedicale ECG cu patologii

Plecand de la semnalul ECG segmentat in cicluri cardiace, in [Fira ICT4AWE 2016] am dezvoltat doua metode de construire a dictionarelor specific pacientului si anume:

- dictionar format din batai cardiace cu unda R centrata
- dictionar cu unda R necentrata

**Dictionar specific semnalului ECG format din batai cardiace cu unda R centrata** - Fiecare segment ECG care contine unda P, complexul QRS și unda T, altfel spus, fiecare ciclu cardiac a fost reesantionat pe 301 esantioane, astfel încât, toate patternurile cardiace sa aiba aceasi dimensiune, fiind astfel posibil să se creeze un dicționar specifici pentru semnale ECG. Obținerea patternurilor cardiace cu reesantionarea și centrarea undei R folosește metoda de segmentare, urmată de poziționarea amplitudinii undei R pe proba 151 și reesantionare din partea stângă a undei R, respectiv din dreapta, pe 150 probe . Astfel, se va avea ca rezultat patternuri cardiace de

dimensiune 301 care vor avea întotdeauna unda R poziționat în mijloc.

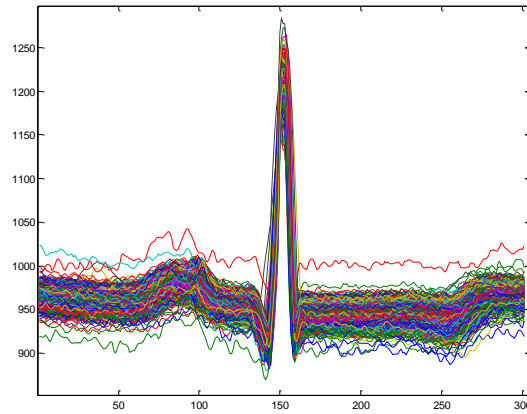


Figura – Patternuri cardiac cu unda R centrata

**Dictionar specific semnalului ECG format din batai cardiace cu unda R centrata** – Ciclurile cardiac extrase din emnalul ECG (care contin unda P, complexul QRS si unda T) sunt reesantionate la 301 esantioane.

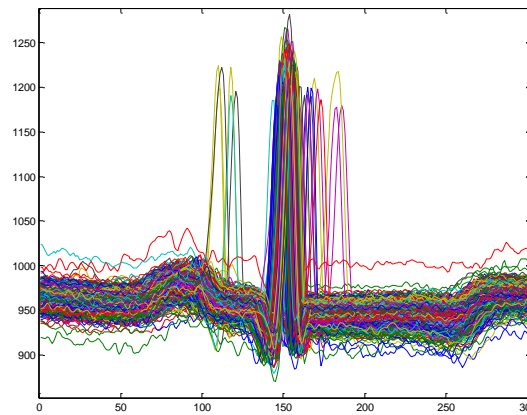


Figura – Patternuri cardiac fara unda R centrata

### A3.3 Particularitati privind achizitia de tip CS a semnalelor de tip EEG; Dictionare specific

In lucrarea [Fira ACHI 2016] sunt propuse doua tipuri noi de dictionare specific semnalului EEG si sunt prezentate rezultatele utilizarii acestor dictionare.

**Dictionare temporal specific semnalului EEG** - Plecand de la rezultatele din [Fira AECE 2012] am construit dictionare din segmente EEG de pe anumite canale predefinite, de la acelasi moment de tip cu inregistrarea EEG comprimata. Astfel, pentru fiecare moment de timp vom avea cate un dictionar. Aceste dictionare sunt construite din semnalul EEG de la canalele care se achizitioneaza in mod clasic, iar acest dictionar este acelasi pentru toate canalele achizitionate comprimat.

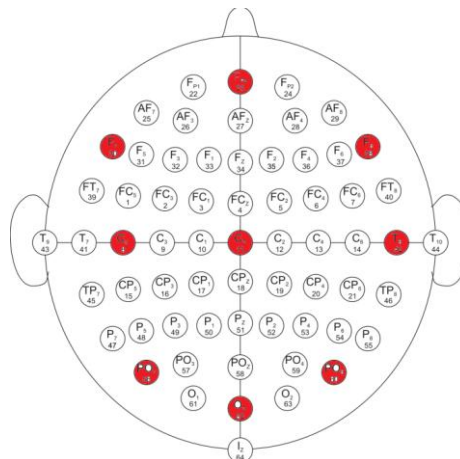


Figura - Plasarea electrozilor si numerotarea acestora. Canalele marcate cu rosu sunt canalele folosite pentru construirea dictionarului. Canalele fara culoare sunt achizitionare comprinat

**Dictionare specific canalului** - Pentru fiecare canal EEG este construit care un dictionar, atomii dictionarului fiind de fapt segmente EEG din setul de antrenare. Pentru datele folosite in lucrarea [Fira ACHI 2016] pentru datele culese pe 64 de canale vom avea 64 de dictionare. Astfel, fiecare dictionar a fost alcatuit din cate 2\*85 atomi, adica pentru fiecare epoca din setul de antrenare am ales aleator 2 segmente de semnal EEG si le-am declarat atomi ai dictionarului.

**Plecand de la ideea de aliniere a atomilor, s-a urmarit realizarea unei alinieri pentru semnalul EEG culese in timpul paradigmei de spelling.** Astfel alinierea posibila pentru EEG este bazata pe momentul de aparitie al stimulului. Astfel, in [Fira COMM 2016] sunt testate doua metode diferite de aliniere si construire a dictionarului necesar decompresiei, si anume:

- Dictionar cu atomi de dimensiune 1 sec cu unda P300 si atomi fara P300 (notati NonP300)
- Dictionar cu atomi formati din segmente EEG aliniate functie de stimulul din paradigma de spelling

**Dictionar cu segmente EEG aliniate functie de stimulul din paradigma de spelling** [Fira COMM 2016] – Acesta este un tip de dictionar particularizat paradigmei de spelling pe baza potentialului P300.

In acest caz dictionarul folosit la reconstructie este alcatuit din segmente EEG care dureaza cat este iluminata o linie sau coloana (adica cat dureaza un stimul) si perioada dintre aprinderi. Semnalele astfel segmentate sunt aliniate, incepand toate cu perioada cat dureaza stimulul si au durata de 42 de esantioane, adica 175 msec. In felul acesta unda P 300 nu apare tot timpul in aceasi regiune. Achizitia comprimata se realizeaza pe segmente EEG de dimensiune de 42 de esantioane.

Aceasta metoda are avantajul ca poate fi facuta in timp real, necesitand doar adnotarea legata de momentul de start al stimulului. Un alt avantaj al acestei metode este faptul ca prin concatenarea semnalelor reconstruite se obtine semnalul EEG, adica nu este necesara o alta etapa suplimentara de reconstruire.

**Dictionar specific paradigmei de spelling continand atomi de dimensiune 1 sec, cu unda P300 si atomi NonP300** [Fira COMM 2016] - In acest caz dictionarul folosit la reconstructie este alcatuit din atomi cu unda P300 aliniata si atomi fara unda P300. La alinierea undei P300 am folosit modalitatea de segmentare a semnalului EEG bazata pe stimul, sugerata in [Blankertz].

*Etapa Constuirea dictionarului:* pentru toate cele 64 de canale, am extras și normalizat toate esantioanele dintre 0 și 1 sec posterior fata de începutul unei intensificare. Am obținut astfel, dintr-un set de antrenare de 85 de caractere contituite într-o baza de date de  $12 * 15 * 85 = 15300$  semnale de 240 de esantioane pentru fiecare canal. Aceste 15 300 semnale (pentru fiecare canal) sunt apoi împărțite în semnale cu unda P300 și fata aceasta unda, adica NonP300, rezultând două subseturi, subsetul de 2550 semnalului cu P300 și subsetul de 12750 semnale NonP300. Din acestea doua subseturi am selectat random un numar stabilit de semnale care reprezinta atomii dictionarului.

**Mega-dictionar EEG specific pacientului** – In [Fira SOMET 2016 si Fira IJACSA 2016] am testat posibilitatea de a construi un mega-dictionar universal construit din segmente EEG de la toate cele 64 de canale EEG achizitionate in mod clasic. Astfel, au fost selectate pentru fiecare canal de trei atomi, care constă în segmente EEG de pe canalul corespunzător, astfel încât într-un total de obținut un dictionar format din  $3 \times 64 = 192$  atomi. Dimensiunea dictionarului este  $192 \times 240$ , pentru că fiecare atom are dimensiunea 240. Pentru construcția dictionarului, am folosit semnale de antrenare din paradigma de Spelling. Testarea metodei a fost făcută folosind semnale de testare EEG care constau în semnale EEG achizitionate comprimat.

**Mega-dictionar EEG universal** – in [Fira SOMET 2016, Fira IJACSA 2016 si Fira Suceava 2016] am testat si posibilitatea construirii unui mega-dictionar specific semnalului EEG care sa fie universal valabil, adica sa nu depinda de pacient. Pentru aceasta dictionarul a fost constuit din bucati din semnalele de antrenare din cadrul paradigmei de spelling, iar semnalele de test au fost comprimate utilizand achizitia comprimata si apoi reconstruite pe baza acestui dictionar. Testarea nedependentei de pacient s-a facut avand grija ca dictionarul sa fie construit de la sembnalele provenind de la pacientul notat cu A si testarea metodei de achizitie comprimata sa se faca pe semnalele de test de la pacinetul B.

Rezultatele obținute au fost raportate în:

**[Fira EHB 2015]** Fira Monica, Applications of Compressed Sensing: Compression and Encryption, International Conference on e-Health and Bioengineering, EHB 2015, 19-21 Noiembrie, Iasi, Romania (indexata *IEEE Xplore*)

**[Fira ICT4AWE 2016]** Monica Fira, Liviu Goras, Victor-Andrei Maiorescu and Mihaela Catalina Luca, „Compressed Sensing and Clasification of Cardiac Beats Using Patient Specific Dictionaries”, International Conference of Information and Communication Technologies for Ageing Well and e-Health - ICT4AWE2016, Roma, Italia, 21-22 aprilie 2016

**[Fira ACHI 2016]** Monica Fira, Liviu Goras, Victor-Andrei Maiorescu, „The Analysis of the Specific Dictionaries for Compressive Sensing of EEG Signals”, International Conference on Advances in Computer-Human Interactions - ACHI 2016, Veneția, Italia, 24-28 aprilie 2016

**[Fira COMM 2016]** Monica Fira, Liviu Goras, „On Compressed Sensing for EEG Signals - Validation with P300 Speller Paradigm”, International Conference on Communications – COMMS 2016 , Bucharest, Romania, 9-11 iunie 2016, DOI: 10.1109/ICComm.2016.7528296 (indexata *IEEE Xplore*)

**[Fira IJACSA 2016]** Monica Fira, “Compressed Sensing of Multi-Channel EEG Signals: quantitative and qualitative evaluation with Speller Paradigm”, International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA), Vol. 7, No. 6, 2016 (revista indexata ISI - Thomson Reuters)

**[Fira SOMET 2016]** Monica Fira, Andrei Maiorescu, "P300 spelling and EEG compressed sensed based on a universal megadictionary", International Conference on Intelligent Software Methodologies, Tools and Techniques - SOMET 2016, Larnaca, Cipru, 12-14 septembrie 2016 (Volume 286: New Trends in Software Methodologies, Tools and Techniques, Series Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, IOS press, DOI 10.3233/978-1-61499-674-3-203, pp: 203 - 212)

## Obiectivul 4 - Metode de optimizare a matricei de masuratori si a dictionarelor utilizate la reconstructie

### A4.1.- Metode de optimizare a matricei de masuratori

### A4.2.- Metode de de optimizare a dictionarelor specifice de tip ECG si EEG

### A4.1.- Metode de optimizare a matricei de masuratori

#### Algoritm îmbunătățit pentru optimizarea matricii de achiziție

O posibilitate de îmbunătățire a algoritmilor prezentați mai sus constă în rezolvarea următoarei clase probleme de optimizare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|G_e - G\|_p \\ \text{s.t.} \quad & G_e \geq 0 \\ & \text{rank}(G_e) = m \\ & \text{diag}(G_e) = 1 \end{aligned}$$

Această formulare reprezintă o generalizare și o îmbunătățire a primilor trei algoritmi prezentați mai sus, din următoarele considerente:

- La fel ca și algoritmul Duarte, și spre deosebire de algoritmi Elad și Xu, algoritmul propus urmărește minimizarea diferenței  $\|G_e - G\|_p$ , și nu a diferenței  $\|G_e - I_N\|_p$ . Motivul îl reprezintă faptul că atomii dicționarului original  $D$  pot prezenta corelații semnificative, reflectate prin valori mari în matricea  $G$ . În urma achiziționării cu matricea de achiziție, dicționarul efectiv  $D_e$  va avea corelații și mai mari, care trebuie micșorate. Procesul de micșorare a corelațiilor lui  $G_e$  nu trebuie însă să țintească dincolo de corelațiile prezente inițial în matricea  $G$ , întrucât acestea erau prezente încă în dicționarul inițial și nu au survenit în urma procesului de achiziție.
- La fel ca în cazul algoritmilor Elad și Xu, și spre deosebire de algoritmul Duarte, se menține condiția ca diagonala principală a matricii  $G_e$  să fie egală cu unitatea, ceea ce înseamnă că atomii dicționarului efectiv  $D_e$  trebuie să fie normați. Acest lucru este esențial în toți algoritmi care urmăresc sub o formă sau alta minimizarea coerenței mutuale; altfel, produsul scalar a doi atomi cu norma mai mică decât 1 va fi mai mic decât valoarea reală a corelației dintre ei. Adăugarea acestei constrângeri schimbă fundamental natura algoritmului Duarte, nemaifiind posibilă o soluție simplă în formă explicită. Soluția se va obține printr-un algoritm numeric iterativ.
- Formularea algoritmului propus reprezintă o generalizare a algoritmilor precedenți. Pentru  $p = 2$ , problema se reduce la algoritmul Duarte cu condiția suplimentară de normare a atomilor, iar pentru  $p = \infty$ , ea devine similară cu algoritmi Elad și Xu, dar cu minimizarea diferenței  $\|G_e - G\|_p$  în loc de  $\|G_e - I_N\|_p$ , din motivele expuse mai sus.

Din aceste considerente, optimizarea matricii de achiziție prin rezolvarea acestei probleme de optimizare reprezintă o soluție mai robustă decât algoritmi din literatură prezentați anterior, combinând avantajele acestora.

Această tip de problemă de optimizare poartă numele de *cea mai apropiată matrice de corelație de rang redus* (*Rank Constrained Nearest Correlation Matrix, RCNCM*) [GaoMajPen], și reprezintă o problemă studiată îndeaproape în literatura de specialitate [PieterszRankRedCorr; GaoMajPen], cu aplicații în multiple domenii științifice. Pentru  $p = 2$ , se poate utiliza algoritmul din [GaoMajPen], bazat pe penalizarea valorilor proprii și majorizare. Această variantă este denumită în continuare RCNCM. Pentru  $p = \infty$ , se pot folosi algoritmi similari cu algoritmul Elad și Xu, dar în care se minimizează iterativ diferența  $G_e - G$ . Aceștia vor fi numiți Elad-G și Xu-G. Diferența între RCNCM și Elad-G / Xu-G o reprezintă norma care este folosită pentru calcularea distanței dintre matrici,  $\ell_2$ , respectiv  $\ell_\infty$ .

#### *Rezultate ale simulărilor*

În continuare, se vor testa performanțele celor patru algoritmi prezentați mai sus în patru condiții diferite:

1. Dicționar generat aleator, semnale sintetice perfect rare
2. Dicționarul este o matrice ortogonală aleatoare cu ușoare diferențe în ceea ce privește norma atomilor, semnalele sunt perfect rare





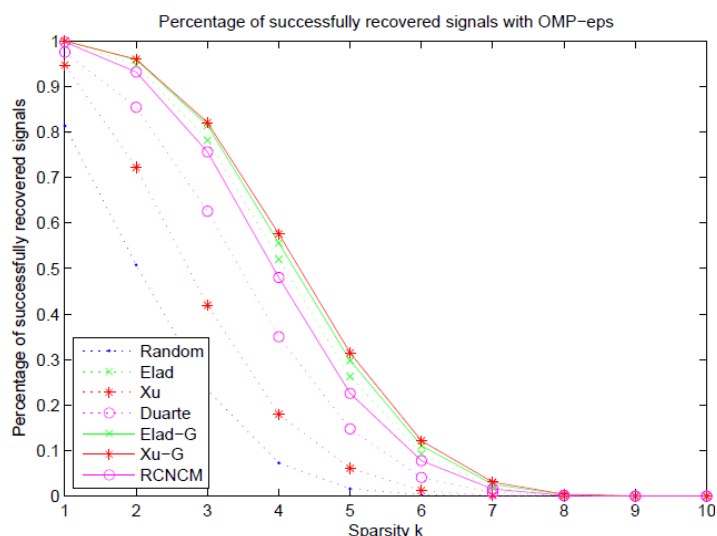


Fig.2: Procentajul de semnale reconstruite cu succes în funcție de raritatea  $k$  (Test 1)

**Test 2: Dicționar aleator ortogonal ne-normalizat, semnale perfect rare**

Al doilea scenariu de test ilustrează dezavantajele algoritmului Duarte, folosind un dicționar cu normalizare imprecisă. Dicționarul este o matrice ortogonală oarecare, cu normele atomilor alese în mod aleator în intervalul  $(1 - 10^{-6}, 1 + 10^{-6})$ . Semnalele rare sunt generate prin combinații aleatoare între atomi.

Tabelul de mai jos prezintă probabilitatea de reconstrucție perfectă din  $m = 16$  măsurători aleatoare optimizate cu algoritmi testați. Se observă că algoritmul Duarte are performanțe extrem de slabe în acest caz, spre deosebire de ceilalți algoritmi. Din nou, diferențele între ceilalți algoritmi sunt ne semnificative, întrucât dicționarul nu prezintă corelații între atomi, care să poată fi exploatate.

| Algoritm  | OMP   |       |       | BP    |       |       |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|           | k=2   | k=4   | k=6   | k=2   | k=4   | k=6   |
| Aleatoriu | 87.1% | 47.2% | 12.7% | 95.1% | 46.7% | 8.2%  |
| Elad      | 99.3% | 92%   | 60.8% | 98.4% | 58%   | 11.2% |
| Xu        | 100%  | 94.5% | 63.7% | 100%  | 60.7% | 11.7% |
| Duarte    | 5.9%  | 0.4%  | 0.0%  | 5.9%  | 0.4%  | 0.0%  |
| Elad-G    | 99.3% | 92%   | 60.8% | 98.4% | 58%   | 11.2% |
| Xu-G      | 100%  | 94.7% | 64.2% | 100%  | 60.2% | 11.9% |
| RCNCM     | 99.2% | 86.8% | 49.5% | 98.7% | 59%   | 11.2% |

Tabel 1: Procentajul semnalelor recuperate folosind un dicționar ortogonal dar imperfect normalizat

**Test 3: Dicționar optimizat, semnale perfect rare**

În acest caz, se generează dicționarul dintr-un set de 5500 imagini  $8 \times 8$ , extrase dintr-un set de 37 de imagini de test din baza de date USC-SIPI, aranjate ca vectori de 64 de elemente. Dicționarul este învățat cu algoritmul K-SVD. Semnalele rare sunt generate apoi ca fiind cele mai bune aproximări cu  $k$  atomi ale unor imagini de test. În acest fel, semnalele obținute sunt perfect rare, dar atomii sunt utilizați în mod neuniform (unii mai des, alții mai rar), fapt mai apropiat de un caz real.

Fig.3 prezintă probabilitatea unei reconstrucții perfecte din  $m = 16$  vectori de proiecție optimizați cu algoritmi testați.

Se observă în acest caz diferențe semnificative între algoritmi, datorită faptului că dicționarul prezintă atomi cu corelații mari. Atât pentru reconstrucția cu OMP, cât și pentru cazul minimizării normei  $\ell_1$ , RCNCM prezintă cele mai bune performanțe.

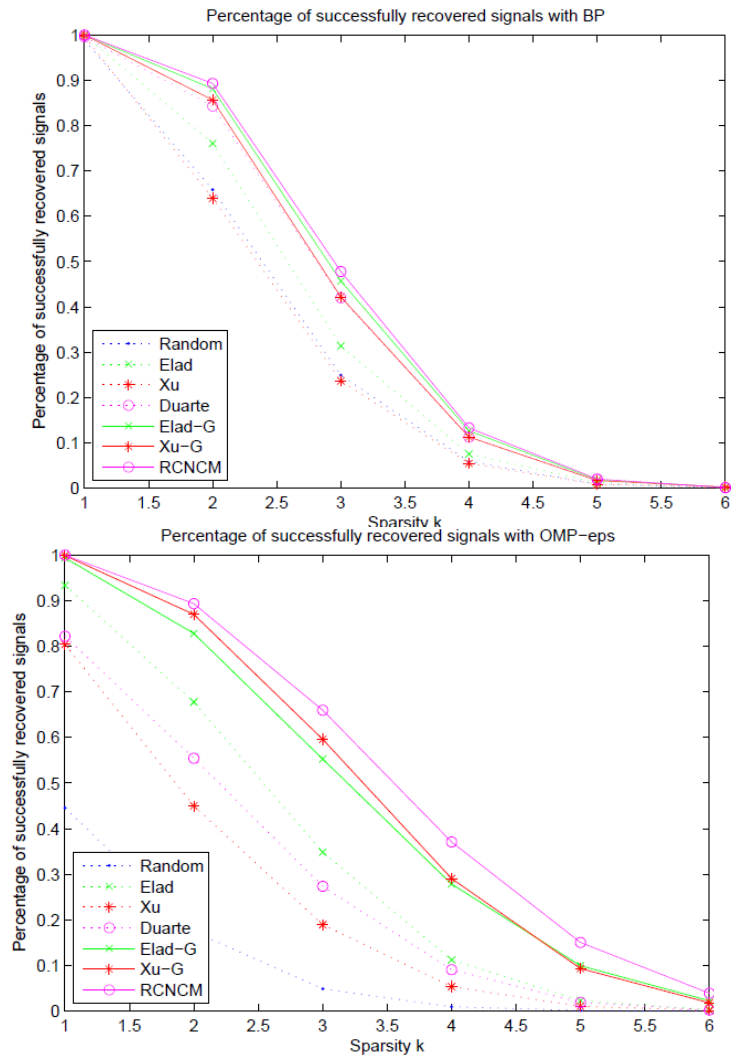


Fig.3: Procentajul de semnale reconstruite cu succes în funcție de raritatea  $k$  (Test 3)

#### Test 4: Dicționar optimizat, semnale reale

În acest ultim test, dicționarul este creat ca în cazul precedent, dar semnalele achiziționate nu mai sunt generate sintetic pentru a fi perfect rare, ci sunt chiar porțiuni de imagini reale. Ca atare, semnalele nu sunt perfect rare, și nu mai putem considera reconstrucția perfectă ca un criteriu de performanță. Se va utiliza în acest scop eroarea medie pătratică a reconstrucției, care este prezentată în Fig.4.

În acest caz, algoritmul Duarte este ușor mai performant decât RCNCM. Acest lucru se poate explica prin faptul că semnalele nu sunt suficient de rare în dicționarul utilizat, încât o descompunere liniară folosind componentele principale ale semnalelor (PCA) este mai performantă decât achiziția comprimată a acestora. Similitudinea matricii de achiziție Duarte cu componentele principale ale semnalelor face ca aceasta să fie ușor în avantaj în acest caz.

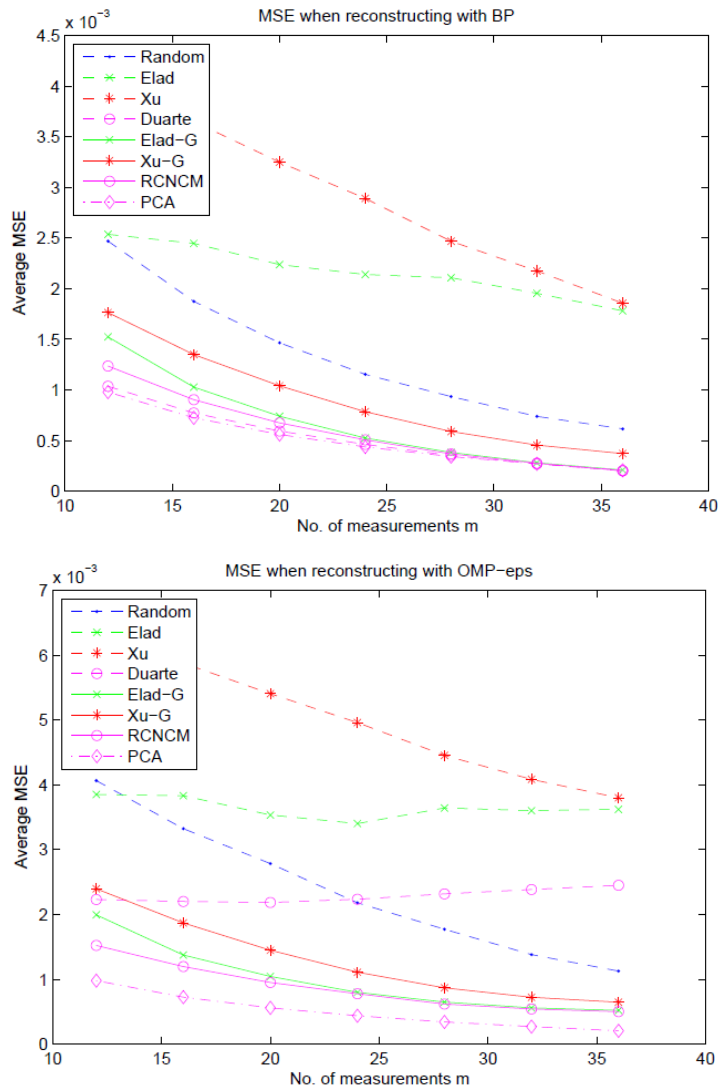


Fig.4: Procentajul de semnale reconstruite cu succes, în funcție de numărul  $m$  de măsurători (Test 4)

## Concluzii

Optimizarea matricii de achiziție este o soluție viabilă atunci când dicționarul utilizat prezintă corelații semnificative între atomi, cum este cazul dicționarelor supracomplete învățate sau construite din semnale reale. Dintre cei patru algoritmi de optimizare utilizați, performanțele cele mai bune au fost oferite de algoritmul RCNCM, urmat îndeaproape de algoritmul Duarte.

## A4.2.- Metode de de optimizare a dicționarelor specifice de tip ECG si EEG

### Generalități

În multe cazuri, semnalele de interes nu au reprezentări suficient de rare în baze sau dicționare uzuale (cum ar fi Fourier, wavelet etc.). Există algoritmi de optimizare a dicționarelor supracomplete în raport cu un anumit set de date de antrenare, cu scopul de a crește raritatea descompunerilor.

Notând cu  $X$  matricea care cuprinde semnalele de test  $x_i$  (pe coloane), cu  $D$  dicționarul și cu  $\Gamma$  matricea descompunerilor rare  $\gamma_i$  ale semnalelor, problema optimizării dicționarului poate fi formulată ca:

$$\operatorname{argmin}_{D, \Gamma} \sum_i \|x_i - D\gamma_i\|_2^2 + \lambda \|\gamma_i\|_0.$$

Cu alte cuvinte, se caută dicționarul  $D$  care permite ca semnalele să aibă descompuneri rare (norma  $\ell_0$  cât mai mică) de acuratețe ridicată (eroarea de reprezentare cât mai mică). Întrucât prezența normei  $\ell_0$  face ca problema să fie NP-hard, aceasta nu poate fi rezolvată în mod direct, în literatura de specialitate fiind propuși un număr de algoritmi alternativi.

În general, acești algoritmi pornesc de la un dicționar inițial, care este apoi actualizat în mod iterativ, în două etape:

1. Având dicționarul la momentul  $k$ ,  $D_k$ , se obțin descompunerile rare  $\gamma_i$  ale unui semnal sau ale mai multor semnalelor
2. Pe baza descompunerilor rare ale semnalelor, se actualizează atomii dicționarului cu scopul de a reduce eroarea de aproximare sau de a crește raritatea descompunerii.

În cele ce urmează sunt prezentați o serie de algoritmi uzuali întâlniți în literatură.

### Metoda direcțiilor

Metoda direcțiilor (*Method Of Directions*, MOD) reprezintă cel mai simplu algoritm de optimizare, motiv pentru care este întâlnit mai degrabă ca algoritm de referință, ca termen de comparație pentru alți algoritmi mai performanți.

Metoda direcțiilor constă în repetarea a doi pași:

1. Cu dicționarul de la iterația  $k$ ,  $D_k$ , se realizează descompunerea semnalelor de test impunând doar un număr limitat de atomi. Prin urmare, rămâne o eroare de reprezentare a semnalelor,  $E$ , în afara celor câțiva atomi selectați.

$$X = D\Gamma + E$$

2. Cu matricea  $\Gamma$  astfel obținută, se urmărește minimizarea erorii reziduale  $E$  prin alegerea dicționarului care minimizează norma erorii  $\|X - D\Gamma\|_2^2$ . Astfel se obține dicționarul de la iterația următoare,  $D_{k+1}$ , care poate fi obținut din relația

$$D_{k+1} = X\Gamma^\dagger,$$

unde  $\Gamma^\dagger$  reprezintă pseudo-inversa matricii  $\Gamma$ .

Cei doi pași sunt repetați până când se obține un dicționar suficient de bun. Descompunerea de la pasul 1 se face de obicei cu algoritmi *greedy* de tipul *Matching Pursuit* sau *Orthogonal Matching Pursuit*, care permit specificarea unui număr prestabilit de atomi în descompunere.

Algoritmul MOD are două dezavantaje principale:

- calculul pseudo-inversei  $\Gamma^\dagger$  necesită un efort mare de calcul la fiecare iterație, mai ales atunci când numărul de semnale de test este mare;
- atomii dicționarului sunt actualizați în bloc, pe baza tuturor descompunerilor rare din matricea  $\Gamma$ , fără a avea un control mai fin prin care atomii să fie actualizați doar în funcție de semnalele în componența cărora se regăsesc.

### Algoritm K-SVD

Algoritm K-SVD aduce o serie de îmbunătățiri algoritmului MOD în ceea ce privește actualizarea dicționarului. Ca și MOD, algoritmul K-SVD constă din repetarea a doi pași, primul dintre ei fiind practic identic:

1. Cu dicționarul de la iterația  $k$ ,  $D_k$ , se realizează descompunerea semnalelor de test impunând doar un număr limitat de atomi. Prin urmare, rămâne o eroare de reprezentare a semnalelor,  $E$ , în afara celor câțiva atomi selectați.

$$X = D\Gamma + E$$

2. Actualizarea dicționarului se face atom cu atom, în felul următor:

- pentru atomul  $d_l$  din dicționar, se rețin numai semnalele  $x_i$  care îl utilizează efectiv în descompunere, obținându-se matricea  $X_l$ ;
- din aceste semnale se scad contribuțiile tuturor celorlalți atomi, rămânând numai eroarea de aproximare și contribuția atomului  $d_l$ . Matricea astfel obținută se notează  $E_l$ ;
- se actualizează atomul  $d_l$  cu scopul de a aproxima cât mai bine matricea  $E_l$ , pentru a minimiza această eroare. Pentru acest lucru  $d_l$  se alege ca fiind primul vector singular stânga al matricii  $E_l$ .

Actualizarea fiecărui atom se face, așadar, în urma unei descompuneri în vectori și valori singulare (*Singular Value Decomposition*, SVD) a fiecărei matrici de eroare  $E_l$ , de unde provine și numele algoritmului. Acest lucru face ca un atom să fie actualizat doar pe baza semnalelor care îl utilizează, ceea ce permite o acuratețe mai bună. În același timp, însă, este posibil ca unii atomi să devină utilizați doar de un grup restrâns de semnale de test, lucru care dăunează capacității generale de reprezentare a dicționarului. Din acest motiv, atomii care ajung să fie utilizați de prea

puține semnale de test sunt eliminați după fiecare iterație și înlocuiți în mod aleator cu alte semnale de test.

Din punct de vedere computațional, calculul vectorului singular dominant pentru fiecare atom în necesită în continuare un efort semnificativ de calcul.

### *Algoritmul de învățare SPAMS*

Un al treilea algoritm, prezentat în [OnlineDictionaryTraining] și inclus în pachetul software SPAMS, aduce o serie de modificări față de soluțiile precedente:

- Actualizarea dicționarului se face *online*, adică în loc de a realiza descompunerea tuturor semnalelor de test în primul pas, se realizează descompunerea câte unui singur semnal urmată de actualizarea imediată a dicționarului. Acest lucru reduce necesarul de memorie al algoritmului, pentru că nu mai este necesar să se opereze cu întregile matrici  $X$  și  $T$ , de mari dimensiuni;
- Actualizarea dicționarului se face prin metoda gradientului stohastic. Pornind de la dicționarul precedent ca soluție inițială, și fiindcă optimizarea se face ca urmare a unui singur nou semnal de test, aceasta se face foarte rapid, cu un minim de resurse computaționale, deseori necesitând o singură iterație a gradientului;
- Descompunerea semnalelor de test se face utilizând algoritmul LARS (*Least Angle Regression*), care minimizează norma  $\ell_1$ , în locul algoritmilor din familia Matching Pursuit.

Datorită acestor modificări, în literatura de specialitate se raportează rezultate superioare obținute cu algoritmul ODT, dar gradul de îmbunătățire depinde de natura semnalelor de test.

### **Baze și dicționare pentru semnale ECG**

Condiția esențială pentru reconstrucția semnalelor ECG dintr-un număr redus de proiecții aleatoare este, fără îndoială, ca semnalele respective să aibă descompunere rară în dicționarul folosit la reconstrucție. De aceea, este important să se investigheze care tip de dicționar este mai potrivit pentru semnale ECG, în sensul că acestea au descompuneri mai rare, permițând astfel o reconstrucție mai bună.

Trebuie menționat că semnalele reale nu au o descompunere rară în mod exact. În realitate, descompunerea unor semnale reale poate fi considerată mai bine ca fiind „compresibilă”, în sensul că este compusă din puțini atomi cu coeficienți semnificativi, restul atomilor având coeficienți de obicei nenuli dar de valoare mică. Acuratețea reconstrucției depinde atât de numărul atomilor semnificativi, cât și de energia conținută de atomii nesemnificativi. Din acest punct de vedere, o descompunere „mai bună” într-un dicționar poate însemna fie o descompunere cu un număr mai redus de coeficienți semnificativi, fie o descompunere cu valori mai mici ale coeficienților nesemnificativi. Este dificil să traseze o linie de demarcație între aceste două fenomene, importanța lor în succesul reconstrucției fiind greu de cuantificat separat. De aceea, le vom trata în mod unitar, considerând că un dicționar este mai bun cu cât aproximarea semnalului cu un număr redus de atomi se îmbunătățește, formulare care acoperă ambele fenomene.

În continuare, s-a investigat calitatea unui număr mare de dicționare, cuprinzând majoritatea bazelor *wavelet* ortogonale disponibile în pachetul software *WaveLab* versiunea 8.50 [WaveLabCode]: Haar, Beylkin, Coiflet 3, Coiflet 4, Coiflet 5, Daubechies 6, Daubechies 8, Daubechies 10, Daubechies 12, Daubechies 14, Symmlet 5, Symmlet 6, Symmlet 7, Symmlet 8, Symmlet 9, Vaidyanathan, Battle 1, Battle 3, Battle 5.

În afară de aceste baze *wavelet* standard, s-au considerat și trei metode de a genera baze particularizate pe baza semnalelor ECG:

1. Dicționar alcătuit prin selecția aleatoare a unor segmente de semnal ECG din setul de test;
2. Dicționar obținut cu algoritmul de învățare SPAMS (ODT) [Mairal2009DL];
3. Dicționar obținut cu algoritmul de învățare K-SVD [Aharon2006KSVD].

Calitatea descompunerilor în aceste dicționare se evaluează prin calcularea erorii medii de aproximare a semnalelor atunci când se păstrează doar primii  $k$  atomi semnificativi, unde valoarea lui  $k$  variază de la 1 (descompunere extrem de rară) la 25 (nu foarte rară). Pentru bazele ortogonale, aproximările cu  $k$  atomi se obțin simplu prin aplicarea transformatei *wavelet* respective asupra semnalelor, păstrând apoi doar cei mai mari  $k$  coeficienți. Pentru cele trei baze suplimentare care nu sunt ortogonale această abordare nu este posibilă, aproximările cu  $k$  atomi fiind găsite prin algoritmul Orthogonal Matching Pursuit [OMPpati1993, OMPMallat1997].

Eroarea medie a aproximărilor cu  $k$  atomi pentru cele mai relevante baze ortogonale și pentru bazele particularizate este prezentată în Fig.5. Rezultate mai detaliate sunt prezentate și în tabelul alăturat, pentru câteva valori ale lui  $k$ .

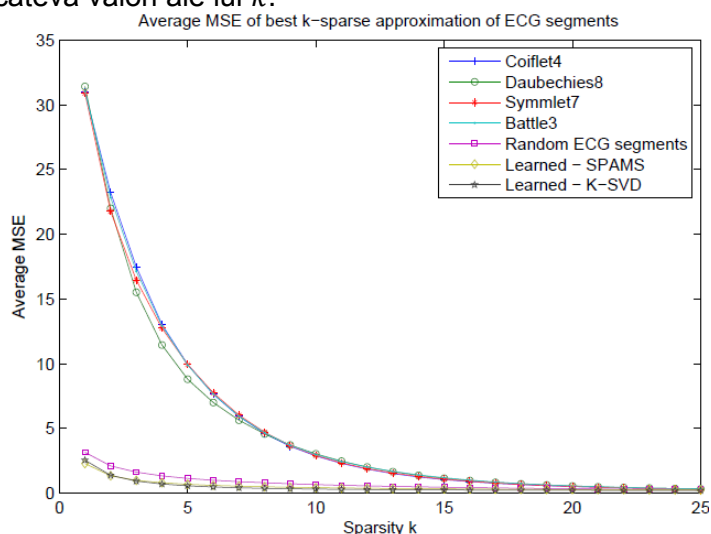


Fig.5: Eroarea medie de aproximare cu  $k$  atomi a semnalelor ECG

| Bază                   | $k=5$ | $k=10$ | $k=15$ |
|------------------------|-------|--------|--------|
| <b>Wavelet</b>         |       |        |        |
| Haar                   |       | 4.83   | 2.21   |
| Beylkin                | 13.8  | 4.36   | 1.8    |
| Coiflet 3              | 11.89 | 3.08   | 1.11   |
| Coiflet 4              | 9.95  | 2.88   | 1.05   |
| Coiflet 5              | 11.27 | 3.26   | 1.19   |
| Daubechies 6           | 11.91 | 3.02   | 1.17   |
| Daubechies 8           | 8.81  | 3.03   | 1.16   |
| Daubechies 10          | 12.85 | 4.33   | 1.46   |
| Daubechies 12          | 12.67 | 3.87   | 1.46   |
| Daubechies 14          | 10.66 | 3.41   | 1.33   |
| Symmlet 5              | 9.39  | 3.13   | 1.14   |
| Symmlet 6              | 11.96 | 3.12   | 1.1    |
| Symmlet 7              | 9.94  | 2.92   | 1.09   |
| Symmlet 8              | 9.99  | 2.9    | 1.06   |
| Symmlet 9              | 10.96 | 3.22   | 1.14   |
| Vaidyanathan           | 11.81 | 4.67   | 1.95   |
| Battle 1               | 11.28 | 3.03   | 1.02   |
| Battle 3               | 9.9   | 2.99   | 1.19   |
| Battle 5               | 9.93  | 3.45   | 1.42   |
| <b>Particularizate</b> |       |        |        |
| Selecție aleatoare     | 1.15  | 0.67   | 0.46   |
| Optimizat - SPAMS      | 0.69  | 0.43   | 0.34   |
| Optimizat - K-SVD      | 0.57  | 0.32   | 0.26   |

Tabel 2: Eroarea medie de aproximare cu  $k$  atomi a semnalelor ECG în diverse dicționare

Rezultatele indică în mod clar că bazele particularizate pentru semnale ECG oferă performanțe mai bune decât cele *wavelet* standard în ceea ce privește aproximarea semnalelor ECG.

### **Achiziția comprimată a semnalelor ECG utilizând un dicționar particularizat**

Achiziția comprimată a semnalelor este o soluție propusă în literatura de specialitate pentru a reduce efortul de calcul la achiziția semnalelor ECG cu dispozitive mobile, [EpfiECG], dar de obicei sunt utilizate dicționare *wavelet* standard. Întrucât comparația de mai sus indică faptul că dicționarele particularizate permit reprezentări mai rare ale semnalelor, este de așteptat ca un astfel de dicționar să conducă la performanțe mai bune în reconstrucția semnalelor ECG achiziționate comprimat.

În cazul unui dicționar supracomplet, este dificil de estimat numărul optim de atomi: un număr mai mare de atomi înseamnă posibilitatea de a avea reprezentări mai rare ale semnalelor, dar cu prețul unui vector de descompunere de dimensiune mai mari (deci mai mulți coeficienți

trebuie reconstituiți). Se cunoaște din literatură faptul că numărul de măsurători necesar pentru reconstrucția cu succes a unui vector rar  $N$ -dimensional este de ordinul  $\mathcal{O}(k \log(N/k))$ , așadar crește logaritmically odată cu dimensiunea vectorului,  $N$ . Prin urmare, valoarea optimă a lui  $N$  rezultă dintr-un compromis între puterea de reprezentare rară a dicționarului (necesită  $N$  mare) și posibilitatea reconstrucției semnalului (necesită  $N$  mic).

Pentru a estima acest lucru, în cele ce urmează este estimată acuratețea reconstrucției semnalelor ECG achiziționate comprimat cu  $m$  măsurători aleatoare, folosind dicționare particularizate de dimensiuni  $256 \times N$  unde  $N$  este, pe rând, 256, 320, 384, 448, 512, 640 sau 768. Dicționarele sunt obținute prin trei metode diferite:

- selectarea aleatoare a  $N$  segmente ECG din setul de antrenare,
- algoritmul SPAMS de învățare a dicționarului,
- algoritmul K-SVD de învățare a dicționarului.

Acuratețea reconstrucției este măsurată prin valoarea PRDN, des întâlnită în literatură, definită ca:

$$PRDN(x, \hat{x}) = \sqrt{\frac{\|x - \hat{x}\|_2^2}{\|x - \mu_x\|_2^2}} \times 100,$$

unde  $\mu_x$  reprezintă componenta continuă a lui  $x$ .

Pentru reconstrucția semnalelor se utilizează metoda minimizării  $\ell_1$ , prin pachetul software  $\ell_1$ -magic pentru Matlab.

În ceea ce privește algoritmii de învățare a dicționarului și dimensiunea optimă a acestuia, Fig. 6 prezintă valorile PRDN medii obținute cu dicționare de dimensiuni diferite, obținute cu toate cele trei metode de învățare. Se observă că algoritmul SPAMS (marcat în legendă ca ODT – *Online Dictionary Training*) oferă cele mai bune rezultate, și pentru acesta dimensiunea dicționarului nu este foarte importantă (pentru plaja de valori testată). Pentru ceilalți algoritmi, o dimensiune mai mare a dicționarului este ușor benefică.

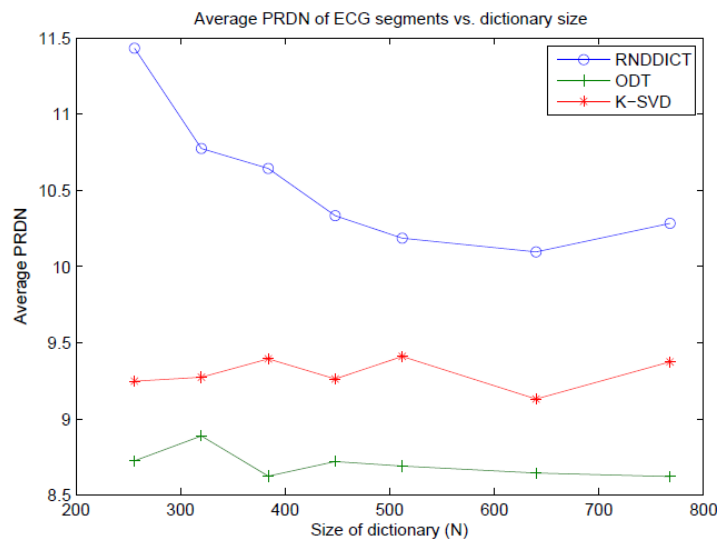


Fig6: Influența dimensiunii dicționarului asupra erorii PRDN

## **Obiectivul 5 - Proiectarea de aplicatii ce vor utiliza dictionarelor particulare in prelucrarea semnalelor ECG**

### **A5.1.- Clasificarea semnalelor ECG in spatiu comprimat**

### **A5.2.- Analiza posibilitatilor de recunoastere si clasificare a semnalelor ECG cu patologii folosind CS**

Am investigat avantajele oferite de achizitia comprimata in aplicatii de monitorizare a pacientilor cu diferite afectiuni cardiace, utilizand conceptual de "compressed sensed" pe semnalul ECG. Utilizand dictionare specific pacientului am analizat posibilitatea achizitiei comprimate a batailor cardiace, urmata de clasificarea acestor batai comprimate in una din doua clase, si anume, batai normale sau batai modificate (adica patologice). De asemenea, cateva tipuri de matrici de proiectie, si anume, matrice random cu distributie Gaussiana, matrice de tip Bernoulli cu elemente de -1, 0, 1 si matrice optimizata functie de dictionarul folosit la reconstructie. S-au analizat si doua tipuri de dictionare specific semnalului ECG (prezentate si la Obiectivul 3, Activitatea 3.2.), si anume, dictionary cu unda R centrata si dictionar fara unda R centrata.

Plecand de la rezultatele in legatura cu clasificarea batailor cardiace achizitionate comprimat, prezentate in lucrarea [FIRA ISSCS 2011] si rezultatele privind dictionare specific pacientului prezentate in [Fira 2011 b, Fira 2013], in [FIRA ROMA 2016] s-a propus o noua metoda de utilizare a conceptului de "compressed sensed" care sa imbine aceste rezultate anterioare. Scopul urmarit a fost de a dezvolta si implementa metoda de achizitie comprimata a semnalului ECG, completat de detectia batailor cardiace anormale pentru a transmite aceste batai la un centru de supraveghere si monitorizare a persoanelor cu afectiuni cardiace.

Impartirea problemei propuse a se rezolva in subprobleme este urmatoarea:

- construirea de dictionare specific pacientului
- clasificarea batailor cardiace
- achizitia comprimata a batailor cardiace anormale
- transmiterea batailor anormale la un centru de supraveghere / inregistrarea acestor batai pentru o analiza ulterioara de catre personal calificat
- reconstruirea batailor achizitionate comprimat

Plecand de la semnalul ECG segmentat in cicluri cardiace, am dezvoltat doua metode de construire a dictionarelor specific pacientului si anume:

- dictionar format din batai cardiace cu unda R centrata
- dictionar cu unda R necentrata

Se stie ca rezultatele achizitiei comprimate sunt influentate intr-o oarecare masura si de tipul de matrice folosit la achizitie. De aceea, am analizat influenta matricei de compresie asupra achizitiei comprimate cat si asupra clasificarii batailor cardiace comprimate. Astfel, am testat trei tipuri de matrici, si anume:

- matrice random
- matrice Bernoulli
- matrice optimizata functie de dictionary [Cleju] - (produsul dintre o matrice random si transpusa dictionarului folosit la reconstructie)

Tipul de clasificator utilizat pentru a clasifica bataile cardiace este KNN (*the k-Nearest Neighbors – cel mai apropiat K vecin*). Am optat pentru acest tip de clasificator deoarece este un clasificator simplu de implementat chiar si in aplicatii practice hardware. Pentru rezultate imbunatatite se pot alege clasificatori mai performanti, insa rezultatele oferite de acest clasificator ne-a multumit pe deplin astfel incat sa-l alegem chiar si in viitor in implementari hardware.

Clasificatorul KNN a fost antrenat cu batai cardiace normale si anormale, uniform repartizate ca numar pe ambele clase. Aceste batai folosite la antrenarea clasificatorului au fost extrase din dictionarul construit pentru achizitia comprimata.

Pentru reconstructie am utilizat algoritmul BP (Basis Pursuit) pentru a determina coeficientii necesari reconstructiei semnalului ECG initial. Dictionarele testate, adica dictionarul cu unda R centrata si dictionarul fara unda R centrata au fost alcatuite din 700 de patternuri cardiace.



Majoritatea metodelor propuse de diferiti autori nu fructifica natura cvasi-periodica a semnalului ECG si particularitatile specific pacientului. De aceea, am dezvoltat, implementat si testat o metoda noua care tine cont de ambele avantaje, si anume, se lucreaza cu batai cardiace (NU cu semnal ECG asa cum este el cules) si in al doilea rand, dictionarele cu care se lucreaza sunt alcătuite din cicluri cardiace provenin de la subiectul pe care se face achizitia.

Astfel, primele 6 minute din inregistrare sau inregistrari anterioare de la acelasi subiect (daca exista) se folosesc pentru a construi dictionarul necesar la reconstructie. Dupa ce s-a construit dictionarul, abia apoi incepe monitorizarea batailor cardiace, clasificarea acestora in normale sau patologice si achizitia comprimata a batailor cardiace acolo unde este cazul (adica acolo unse se detecteaza o anormalitate cardiac).

Pentru implementarea metodei propuse este nevoie de un o memorie buffer.

Din esantioanele ECG inregistrate si care sunt stocate in zona tampon pentru precesare, un ciclu cardiac complete ste extras prin detectarea unei R, urmata apoi de segmentarea semnalului ECG intre mijlocul a doua interval RR consecutive. Pentru cazul cand se folosesc cicluri cardiac fara unda R centrata, segmentele extrase sunt reesantionate pe 301 esantioane. Pentru cazul cu unda R centrata, fiecare segment ECG este inpartit in doua de unda R, si anume partea din fara unei R si partea de dupa unda R, fiecare din aceste parti fiind reesantionat la 150 de esantioane.

Un ciclu cardiac este reesantionat la o dimensiune fixa de 301 esantioane, optional cu unda R alineata la mijlocul segmentului.

O schema bloc a metodei propuse este prezentata in Fig 1.

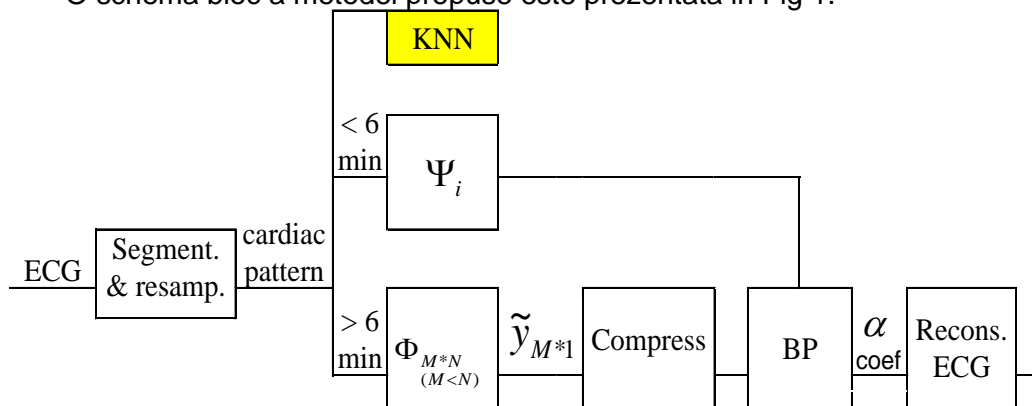


Figura 1 – Principiul metodei de achizitie comprimata, specific metodei ECG

Pentru a evalua distorsiunile dintre semnalul original si semnalul reconstruit am folosit PRD si variant anesteuia normalizata (PRDN)

$$PRD\% = 100 \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (x(n) - \tilde{x}(n))^2}{\sum_{n=1}^N x^2(n)}} \quad PRDN\% = 100 \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (x(n) - \tilde{x}(n))^2}{\sum_{n=1}^N (x(n) - \bar{x})^2}}$$

unde  $x(n)$  and  $\tilde{x}(n)$  sunt esantioanele originale si respective ale semnalului reconstruit, iar  $\bar{x}$  este media valorilor semnalului original,  $N$  = lungimea ferestrei pe care se calculeaza PRD.

Pentru evaluarea compresiei am folosit rata de compresie (CR) definit ca raportul dintre numarul de biti necesari semnalului originals I semnalului comprimat,

$$CR = \frac{b_{orig}}{b_{comp}}$$

unde  $b_{orig}$  and  $b_{comp}$  reprezinta numarul de biti necesari reprezentarii semnalului original si respective semnalului comprimat.

Pentru a testa metoda propusa s-au folosit 14 inregistrari ECG publice din baza de date MIT-BIH Arrhythmia, si naume, inregistrările cu ID 100, 101, 102, 104, 105, 106, 119, 201, 202, 203, 210, 212, 217, 219. Semnalul ECG

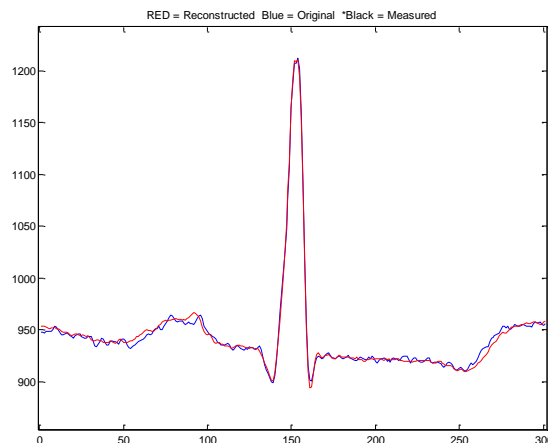


Figura 2 - Bataie cardiac normal si reconstuita dupa achizitia comprimata

Tabelul 1 prezinta rezultatele medii obtinute pe 14 inregistrari pentru o compresie de CR – 15:1 si pentru trei tipuri de matrici de achizitie folosite.

Tabel 1: Rezultate medii obtinute pe 14 inregistrari

| Projection matrix  | CR   | Avg. PRD | Avg. PRDN | Classification rate |
|--|------|----------|-----------|---------------------|
| <b>Patient specific dictionary with un-centered R-wave</b> |      |          |           |                     |
| Gaussian distribution Random*Dict†(20*301)                 | 15:1 | 0.78     | 11.98     | 92.24%              |
| 0 and 1 (with controlled arrangement)(20*301)              | 15:1 | 0.94     | 16.06     | 84.71%              |
| Gaussian distribution Random (20*301)                      | 15:1 | 0.82     | 13.82     | 91.14%              |
| <b>Patient specific dictionary with centered R-wave</b>    |      |          |           |                     |
| Gaussian distribution Random*Dict†(20*301)                 | 15:1 | 0.51     | 9         | 93.41%              |
| 0 and 1 (with controlled arrangement)(20*301)              | 15:1 | 0.71     | 12.4      | 88.06%              |
| Gaussian distribution Random (20*301)                      | 15:1 | 0.72     | 12.51     | 89.70%              |

Din moment ce mulți autori raportează pe lângă rezultatele medii obținute pe bazele de date MIT-BIH si rezultatele de la inregistrarea 117, am prezentat în tabelul 2 rezultatele obtinute pe aceasta inregistrare.

Tabel 2: Rezultate medii pentru inreg 117

| Projection matrix  | CR   | Avg. PRD | Avg. PRDN |
|--|------|----------|-----------|
| <b>Patient specific dictionary with un-centered R-wave</b> |      |          |           |
| Gaussian distribution Random*Dict†(20*301)                 | 15:1 | 0.38     | 8.82      |
| 0 and 1 (with controlled arrangement)(20*301)              | 15:1 | 0.56     | 12.81     |
| Gaussian distribution Random (20*301)                      | 15:1 | 0.53     | 12.27     |
| <b>Patient specific dictionary with centered R-wave</b>    |      |          |           |
| Gaussian distribution Random*Dict†(20*301)                 | 15:1 | 0.38     | 8.73      |
| 0 and 1 (with controlled arrangement)(20*301)              | 15:1 | 0.49     | 11.25     |
| Gaussian distribution Random (20*301)                      | 15:1 | 0.48     | 11.15     |

In Tabelul 3 sunt prezentate rezultatele pentru reconstructia patternurilor cardiac cu si fara unda R centrata, pentru compresii de CR = 4:1, 10:1 si 15:1 pentru matrice de achizitie optimizata functie de dictionary.

Tabel 3: Rezultate medii obtinute pe inregistrarea 117 pentru Cr = 4:1, 10:1: si 15:1 pentru matrice optimizata functie de dictionar

| Projection matrix  | CR   | Avg. PRD | Avg. PRDN |
|--|------|----------|-----------|
| <b>Patient specific dictionary with un-centered R-wave</b> |      |          |           |
| Gaussian distribution Random*Dict†(20*301)                 | 4:1  | 0.19     | 4.36      |
|  | 10:1 | 0.29     | 6.77      |
|  | 15:1 | 0.38     | 8.82      |
| <b>Patient specific dictionary with centered R-wave</b>    |      |          |           |
| Gaussian distribution Random*Dict†(20*301)                 | 14:1 | 0.19     | 4.54      |
|  | 10:1 | 0.29     | 6.80      |
|  | 15:1 | 0.36     | 8.43      |

Tabel 4: Rezultatele pentru inregistrarea 100 pentru CR = 4:1, 10:1 si respectiv 15:1 pentru matrice optimizata functie de dictionar

| Projection matrix  | CR   | Avg. PRD | Avg. PRDN | Classification rate |
|--|------|----------|-----------|---------------------|
| <b>Patient specific dictionary with un-centered R-wave</b> |      |          |           |                     |
| Gaussian distribution Random*Dict†(20*301)                 | 4:1  | 0.19     | 4.36      | 99.12%              |
|  | 10:1 | 0.29     | 6.77      | 98.17%              |
|  | 15:1 | 0.38     | 8.82      | 98.83%              |
| <b>Patient specific dictionary with centered R-wave</b>    |      |          |           |                     |
| Gaussian distribution Random*Dict†(20*301)                 | 14:1 | 0.19     | 4.54      | 99.85%              |
|  | 10:1 | 0.29     | 6.80      | 96.27%              |
|  | 15:1 | 0.36     | 8.43      | 99.56%              |

In Tabelul 4 sunt prezentate rezultatele pentru inregistrarea 100 pentru cazul cu matrice optimizata functie de dictionar, precum si rata de clasificare a batailor cardiace obtinute pe aceasta inregistrare. In Tabelul 5 sunt prezentate rezultatele clasificarii ciclurilor cardiac obtinute pe semnalele reconstruite.

Tabel 5: Results Rezultatele pentru CR = 15:1

| PPV_class1%                            | PPV_class2% | k-Nearest Neighbors | ID_ECG | Total Classification rate % |
|--|-------------|---------------------|--------|-----------------------------|
| <b>PPV = positive predictive value</b> |             |                     |        |                             |
| 99.9                                   | 96.4        | 1                   | 100    | 99.8                        |
| 99.9                                   | 85.7        | 2                   |        | 99.6                        |
| 99.6                                   | 92.9        | 3                   |        | 99.4                        |
| 88.8                                   | 100.0       | 1                   | 101    | 88.8                        |
| 99.4                                   | 100.0       | 2                   |        | 99.4                        |
| 96.4                                   | 100.0       | 3                   |        | 96.4                        |
| 100.0                                  | 99.5        | 1                   | 102    | 99.5                        |
| 100.0                                  | 97.6        | 2                   |        | 97.6                        |
| 100.0                                  | 97.7        | 3                   |        | 97.7                        |
| 68.8                                   | 99.1        | 1                   | 104    | 98.0                        |
| 75.0                                   | 96.9        | 2                   |        | 96.2                        |
| 56.3                                   | 99.8        | 3                   |        | 98.2                        |
| 95.4                                   | 87.5        | 1                   | 105    | 95.3                        |
| 98.2                                   | 87.5        | 2                   |        | 98.1                        |
| 97.5                                   | 87.5        | 3                   |        | 97.4                        |
| 99.6                                   | 97.7        | 1                   | 106    | 98.9                        |
| 99.9                                   | 95.7        | 2                   |        | 98.4                        |

|       |       |   |     |       |
|-------|-------|---|-----|-------|
| 99.9  | 95.7  | 3 |     | 98.4  |
| 100.0 | 100.0 | 1 | 119 | 100.0 |
| 100.0 | 100.0 | 2 |     | 100.0 |
| 100.0 | 100.0 | 3 |     | 100.0 |
| 51.4  | 83.5  | 1 | 201 | 59.0  |
| 65.7  | 77.1  | 2 |     | 68.4  |
| 61.3  | 79.9  | 3 |     | 65.7  |
| 49.3  | 80.0  | 1 | 202 | 50.3  |
| 66.2  | 75.0  | 2 |     | 66.5  |
| 57.5  | 80.0  | 3 |     | 58.2  |
| 97.3  | 94.8  | 1 | 203 | 50.3  |
| 98.6  | 90.5  | 2 |     | 66.5  |
| 97.7  | 94.4  | 3 |     | 58.2  |
| 98.7  | 93.3  | 1 | 210 | 98.2  |
| 99.6  | 87.7  | 2 |     | 98.5  |
| 99.2  | 89.0  | 3 |     | 98.3  |
| 97.2  | 100.0 | 1 | 212 | 99.0  |
| 98.4  | 99.7  | 2 |     | 99.2  |
| 96.9  | 100.0 | 3 |     | 98.9  |
| 0.0   | 100.0 | 1 | 217 | 82.9  |
| 0.0   | 100.0 | 2 |     | 82.9  |
| 0.0   | 100.0 | 3 |     | 82.9  |
| 90.0  | 62.9  | 1 | 219 | 89.3  |
| 99.3  | 54.3  | 2 |     | 98.1  |
| 93.8  | 60.0  | 3 |     | 92.8  |

Tabelul 6 contine rezultatele medii pe toate cele 14 inregistrari, precum si rezultate pentru inreg. 117, rezultate obtinute atat de noi cat si cele raportate in [Polania 2011 a, b] and [Mamaghanian 2011].

Tabel 6: Rezultate medii obtinute pe 24 de inregistrari, respective pe inregistrarea 117

|   | Record / Ave.    | CR        | Avg. PRD           | Avg. PRDN |
|---|------------------|-----------|--------------------|-----------|
| <b>Other Compression Algorithms</b>   |                  |           |                    |           |
| POLANIA [Polania 2011a,b]   | 117              | 8:1       | 2.18               | Notspec.  |
| POLANIA [Polania 2011a,b]   | 117              | 10:1      | 2.5                | Notspec.  |
| MAMAGHANIAN [Mamaghanian et al. 2011] for before and after inter-packet redundancy removal and Huffman coding | Ave. for 14 recs | 4:1 (75)  | Before Huffman 35  |           |
|   |                  |           | After Huffman 15   |           |
|   |                  | 10:1 (90) | Before Huffman >45 |           |
|   |                  |           | After Huffman >45  |           |
|   |                  | 15:1 (93) | Before Huffman >45 |           |
|   |                  |           | After Huffman >45  |           |

Notam ca Mamaghanian in [Mamaghanian 2011] prezintă o metodă de compresie bazată pe CS clasic, urmat de codare Huffman. Astfel, compresia finala raportata este crescută prin utilizarea de codificare Huffman. În [Mamaghanian 2011] rezultatele sunt prezentate atât înainte, cât și după codare Huffman. Prin urmare, pentru o comparație relevantă rezultatele noastre ar trebui să fie comparate cu cele înainte de Huffman de codificare raportate de Mamaghanian.

Remarcam de asemenea ca Mamaghanian foloseste raportul de compresie exprimat ca

$$CR = \frac{b_{orig} - b_{comp}}{b_{orig}} * 100$$

, formula care este diferita de cea folosita de noi in lucrari. Astfel, in Tabelul 7 este prezentata corespondenta intre cele doua masuri de compresie folosite de noi si de Mamaghanian in [Mamaghanian 2011].

Tabel 7: Corespondenta dintre CR utilizata de Mamaghanian in [Mamaghanian 2011] si CR utilizata de noi in [Fira ICT4AWE 2016]

| $CR = \frac{b_{orig} - b_{comp}}{b_{orig}} * 100$<br>Mamaghanian |                     | $CR = \frac{b_{orig}}{b_{comp}}$<br>[Fira ICT4AWE 2016] |                     |
|--|---------------------|---|---------------------|
| Mamaghanian  | [Fira ICT4AWE 2016] | Mamaghanian   | [Fira ICT4AWE 2016] |
| 10   | 1.11                | 91  | 11.11               |
| 20   | 1.25                | 92  | 12.50               |
| 30   | 1.43                | 93  | 14.29               |
| 40   | 1.67                | 94  | 16.67               |
| 50   | 2                   | 95  | 20                  |
| 60   | 2.5                 | 96  | 25                  |
| 70   | 3.33                | 97  | 33.33               |
| 80   | 5                   | 98  | 50                  |
| 90   | 10                  | 99  | 100                 |

Astfel, am proiectare, dezvoltare si testare posibilitatea de a construi dictionare specifice pacientilor pentru a achizitiona comprimat batai cardiace care sunt clasificate de un clasificator de tipul KNN ca fiind anormale. Trebuie remarcate cateva aspecte foarte importante, si anume:

- Rezultatele foarte bune de clasificare in doua clase (normal si anormal), altfel spus, de detectie a batailor cardiace anormale achizitionate comprimat
- Posibilitatea reconstruirii batailor cardiace achizitionate comprimat
- complexitate mica a calculelor in etapa de achizitie comprimat
- Un clasificator de tip KNN pentru partea de clasificare, ceea ce inseamna deasemenea o complexitate mica de calcule

Tinand cont de toate aceste aspect se poate considera ca lucrarea de fata este un prim pas important in implementarea software a unui algoritm de monitorizare si management a situatiilor de criza cardiac.

### **Bibliografie**

[Mamaghanian 2011] Mamaghanian H., Khaled N., Atienza D., Vanderghenst P., "Compressed Sensing for Real-Time Energy-Efficient ECG Compression on Wireless Body Sensor Nodes", IEEE Trans Biomed Eng. 2011 Sep;58(9):2456-66.

[Polania 2011a] Polania L. F., Carrillo R. E., Blanco-Velasco M., E. Barner K., "ECG compression via matrix completion", EUSIPCO 2011

[Polania 2011b] Polania L. F., Carrillo R. E., Blanco-Velasco M., E. Barner K., "Compressed sensing based method for ECG compression", 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011

### **Rezultatele obtinute au fost raportate în:**

[Fira ICT4AWE 2016] Monica Fira, Liviu Goras, Victor-Andrei Maiorescu and Mihaela Catalina Luca, „Compressed Sensing and Clasification of Cardiac Beats Using Patient Specific Dictionaries”, International Conference of Information and Communication Technologies for Ageing Well and e-Health - ICT4AWE2016, Roma, Italia, 21-22 aprilie 2016

## Obiectivul 6 - Proiectarea de aplicatii ce vor utiliza dictionarelor particulare in prelucrarea semnale EEG

### A6.1.- Posibilitatea integrarii achizitiei comprimate in sisteme de tip BCI

In [Fira ACHI 2016] este analizata posibilitatea utilizarii a trei tipuri de dictionare specific semnalului EEG in aplicatii de Brain Computer Interface (BCI). Rezultatele experimentale sunt analizate atata din punct de vedere cantitativ al erorilor de reconstructive, cats I din punct de vedere calitativ al semnalului (si anume, pe baza ratei de clasificare din cadrul paradigmei de spelling). Pentru evaluare am folosit semnalele EEG din cadrul competitiei BCI Competition III 2005 -P300 Spelling – baza de date II.

In tabelul 1 sunt prezentate rezultatele cu cele trei dictionare testate. Astfel, dictionarele testate sunt cele prezentate la **OBIECTIVUL 3 – ACTIVITATEA 3.3.** si anume:

- **Dictionare temporal specific semnalului EEG**
- **Dictionare specific canalului**
- **Dictionar standard wavelet Daubechies 10**

Se observa ca din punct de vedere al erorilor de reconstructie exprimate prin PRDN, cele mai mici erori s-au obtinut in cazul dictionarelor temporale specific semnalului EEG, adica alcatuite din atomi de la acelasi moment de timp de pe canalele achizitionate normal. Daca tinem cont de rata de clasificare pe paradigm de spelling, atunci cele mai bune rezultate se obtin in cazul dictionarelor specifice canalului.

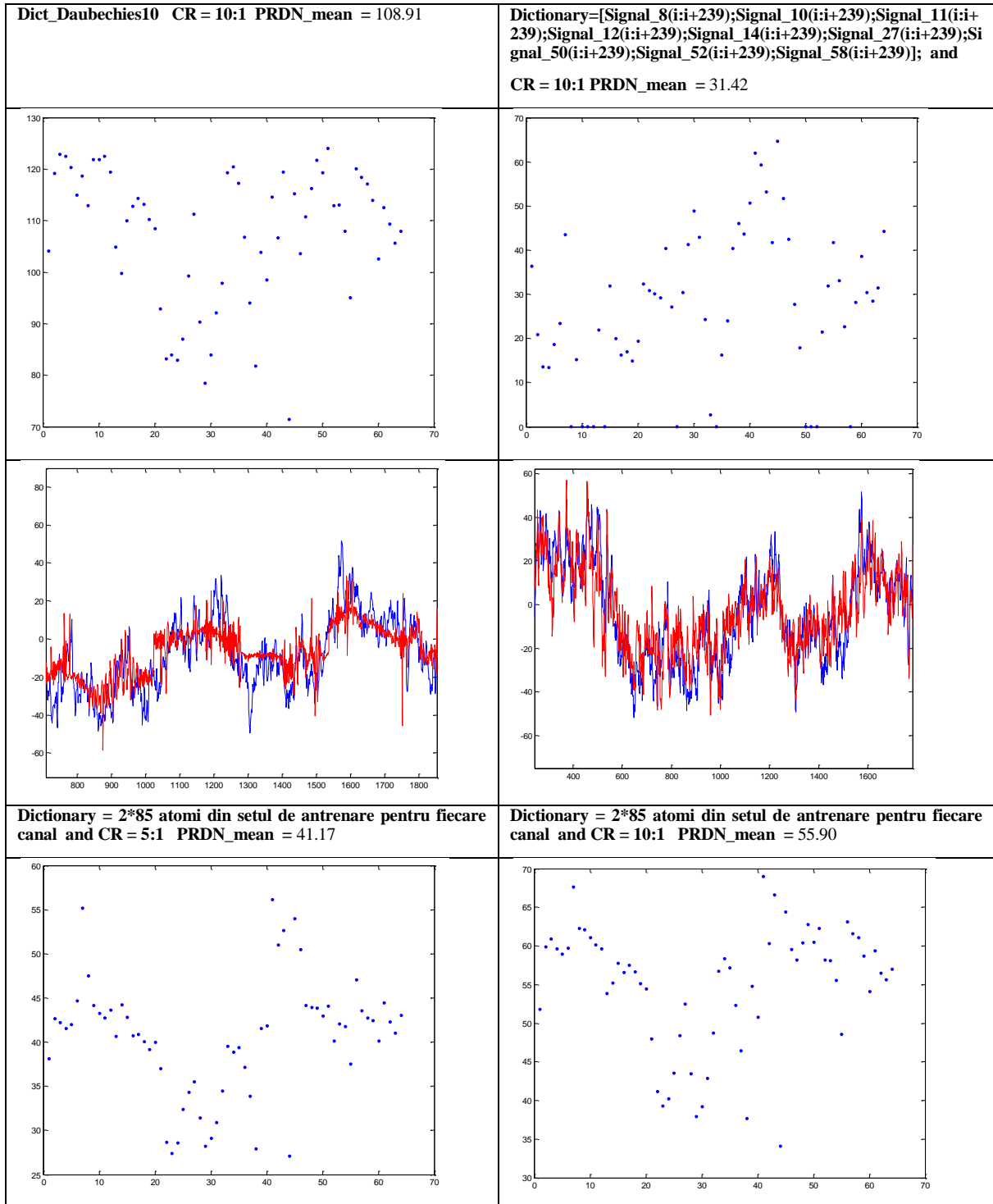
*Tabel 1 – Rezultate medii: PRDN\_Mean si performanta de clasificare in % caractere recunoscute corect pentru subiectul B functie de cresterea numarului de repetitii.*

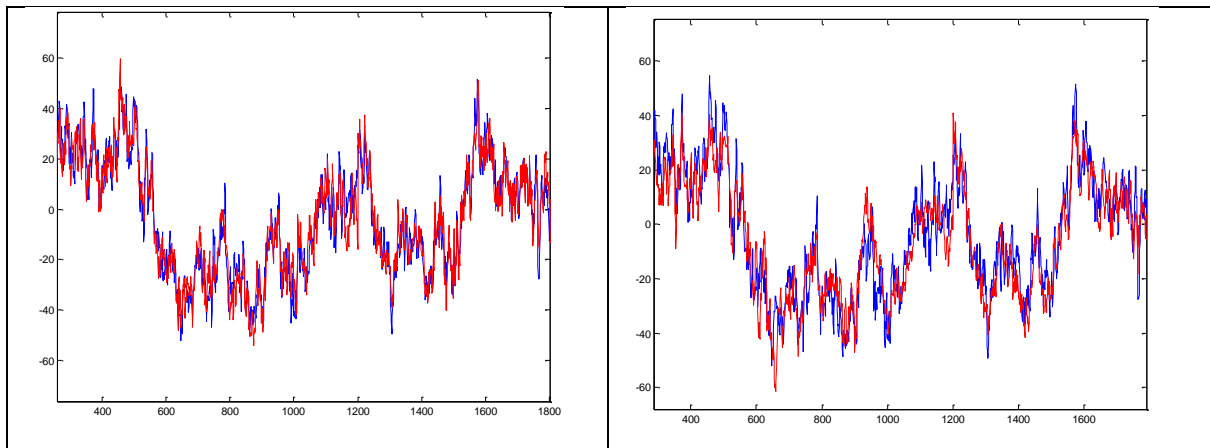
| P300 Spelling - classification performance for number of sequences  |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           | PRDN mean |              |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|
|   | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | 8         | 9         | 10        | 11        | 12        | 13        | 14        | 15        |              |
| <b>Original data – uncompressed and classified by Alain Rakotomamonjy and Vincent Guigue</b>  |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |              |
| -   | 38        | 60        | 70        | 69        | 80        | 84        | 86        | 89        | 92        | 93        | 95        | 96        | 96        | 96        | 95        | 0            |
| <b>Dict_Daubechies10</b>  |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |              |
| 10:1  | 7         | 17        | 16        | 18        | 27        | 29        | 37        | 40        | 38        | 41        | 48        | 45        | 51        | 48        | 54        | 108.91       |
| <b>Dictionar=[Signal_8(i:i+239);Signal_10(i:i+239);Signal_11(i:i+239);Signal_12(i:i+239);Signal_14(i:i+239);Signal_27(i:i+239);Signal_50(i:i+239);Signal_52(i:i+239);Signal_58(i:i+239)];</b> |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |              |
| 5:1   | 22        | 31        | 42        | 50        | 54        | 61        | 68        | 70        | 72        | 77        | 82        | 85        | 79        | 79        | 81        | 35.38        |
| 10:1  | 23        | 35        | 42        | 44        | 54        | 57        | 60        | 63        | 68        | 70        | 76        | 78        | 76        | 78        | 80        | <b>31.42</b> |
| <b>Dictionar = 2*85 atomi din setul de antrenare pentru fiecare canal</b>   |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |              |
| 5:1   | <b>29</b> | <b>41</b> | <b>50</b> | <b>62</b> | <b>68</b> | <b>74</b> | <b>73</b> | <b>78</b> | <b>82</b> | <b>82</b> | <b>86</b> | <b>86</b> | <b>86</b> | <b>87</b> | <b>90</b> | 41.17        |
| 10:1  | 19        | 30        | 43        | 52        | 50        | 60        | 60        | 65        | 73        | 71        | 78        | 82        | 84        | 82        | 89        | 55.90        |

In tabelul II sunt prezentate PRDN vs. canal (figura de sus) si exemple de semnal EEG original si reconstruit (figura de jos). Cele mai proaste rezultate se obtin cu dictionare de tip wavelet. Intre rata de clasificare in paradigm de spelling si eroarea exprimata ca PRDN exista o neconcordanta, si anume, nu intotdeauna cele mai mici erori PRDN conduc la cea mai mare rata de clasificare (vezi rezultatele bold din tabel).

Explicatia pentru neconcordanta dintre rata de clasificare si PRDN mediu este urmatoarea: fiecare canal are o anumita pondere in rata de clasificare de spelling. Rezultatele obtinute conduc la concluzia ca unele canale care au o pondere mai mare in rata de clasificare sunt reconstruite mai bine decat altele care au o insemnatate mica. Astfel, se poate observa ca pentru dictionarele specific canalului, atat la compresie de 5:1 cat si la compresie de 10:1 eroarea pe canalele 22 – 38 este mult mai mica decat pentru restul canalelor. De fapt se poate vorbi de o grupare a erorilor in

trei clusteri, si anume, o clasa pentru canalele 1-21, o a doua clasa pentru canalele 22-40 si o a treia clasa pentru canalele 41-64. Aceste trei grupe sant in stansa legatura si cu asezarea craniana a electrozilor.





Pe baza rezultatelor obtinute se constata ca cele mai proaste rezultate se obtin in cazul folosirii dictionarelor standard wavelet. Celelalte doua dictionare, specific semnalului EEG, conduc la rezultate mult mai bune.

Astfel, in cazul dictionarului specific canalului se obtin cele mai bune rezultate din punct de vedere al clasificarii in paradigm de spelling, si anume, pentru CR = 5:1 rata de clasificare este de 90%, iar pentru 10:1 se obtine o rata de clasificare de 89% (pentru semnalele originale s-a obtinut o rata de clasificare de 95%).

In cazul dictionarelor temporale specific semnalului EEG se obtin cele mai bune rezultate din punct de vedere al erorii exprimata ca si PRDN, adica pentru o compresie de 5:1 se obtine un PRDN = 35.38, iar pentru 10:1 se obtine PRDN = 31.42.

Rezultatele demonstreaza ca dictionarele specific canalului sau dictionarele temporale specific semnalului EEG ofera rezultate mult imbunatatite fata de dictionarele standard wavelet.

**In [Fira COMM 2016] sunt propuse doua metode noi si diferite de achizitie comprimata a semnalului EEG. Metodele propuse sunt specific paradigmei de spelling - P300 Evoked Potentials.** Rezultatele obtinute sunt comparate atat ca erori de decompresie cat si prin masuri de acuratele a semnalelor, si anume, clasificarea semnalelor EEG din punct de vedere al paradigmei de spelling.

In cazul semnalului ECG o aliniere atat a atomilor din dictionar cat si a segmentelor ECG achizitionate comprimat imbunatatesc foarte mult rezultate. Pentru semnalele ECG aceasta aliniere se poate realiza tinand cont de unda R sau complexul QRS. In cazul semnalului EEG alinierea este mai dificila deoarece nu exista elemente evidente, repetitive si distincte in domeniul timp. Semnalul EEG este un semnal biologic care trebuie interpretat cu precadere in domeniul frecventa. Cu toate acestea in cazul experimentului BCI de spelling s-a observat ca este specifica o modificarea temporala care apare dupa aproximativ 300ms de la stimul, modificare numita P300. Aceasta modificare temporala este evidentiata prin medierea mai multor semnale EEG. Daca se analizeaza un singur segment EEG, fara medierea mai multor stimuli repetitive atunci nus e observa aceasta modificare temporala P300.

Plecand de la ideea de aliniere a atomilor, s-a urmarit realizarea unei alinieri pentru semnalul EEG culesse in timpul paradigmei de spelling. Astfel alinierea posibila pentru EEG este bazata pe momentul de aparitie al stimulului.

Plecand de la observatiile anterioare noi am testat doua metode diferite de aliniere si construire a dictionarului necesar decompresiei (descries la **OBIECTIVUL 3 – ACTIVITATEA 3.3.**), si anume:

- **Dictionar cu atomi de dimeniune 1 sec cu unda P300 si atomi fara P300 (notati NonP300)**



- **Dictionar cu atomi formati din segmente EEG aliniate functie de stimulul din paradigma de spelling**

Partea comuna a celor doua metode este ca din setul de semnale de antrenare, pentru fiecare canal EEG este construit un astfel de dictionar. Apoi, achizitia comprimata se realizeaza pe setul de semnale de test.

### Resultate obtinute prin CS clasic

In tabelul 1 sunt prezentate rezultatele medii obtinute cu metoda cu dictionar alcatuit din segmente EEG pentru o compresie de 5:1. Se observa ca rezultatele exprimate la PRDN sunt influentate puternic de numarul de atomi, adica de dimensiunea dictionarului folosit la reconstructie. Cresterea numarului de atomi nu presupune intotdeauna si scaderea erorilor, ci mai degraba exista un optim. Pentru o compresie de 5:1 numarul optim de atomi este 168, adica un dictionar cu dimensiunile 42\*168.

Tabel 1- Average Results For Classical EEG compressed sensed

| Time (h)    | Nr Atoms   | PRD mean     | CR  | PRD mean     | CR          |
|-------------|------------|--------------|-----|--------------|-------------|
| 5.8         | 42         | 64.04        | 5:1 | 98.32        | 10:1        |
| 9.1         | 84         | 51.54        | 5:1 | 97.23        | 10:1        |
| 15.8        | 126        | 50.22        | 5:1 | 95.19        | 10:1        |
| <b>24.9</b> | <b>168</b> | <b>43.56</b> | 5:1 | <b>91.50</b> | <b>10:1</b> |
| 37.5        | 200        | 54.01        | 5:1 | 94.35        | 10:1        |
| 62.6        | 252        | 59.33        | 5:1 | 99.56        | 10:1        |

In Figura 1 este reprezentata eroarea PRDN in functie de canalul EEG pentru dictionar cu 126 de atomi si pentru dictionar cu 168 de atomi. Se observa un pattern care se pastreaza, cu o rescalare doar functie de numarul atomilor din dictionar. Adica, canalele 1-20 si 45-64 au o eroare mai mica comparativ cu canalele 21-44, care au tot timpul o eroare de reconstructie mai mare.

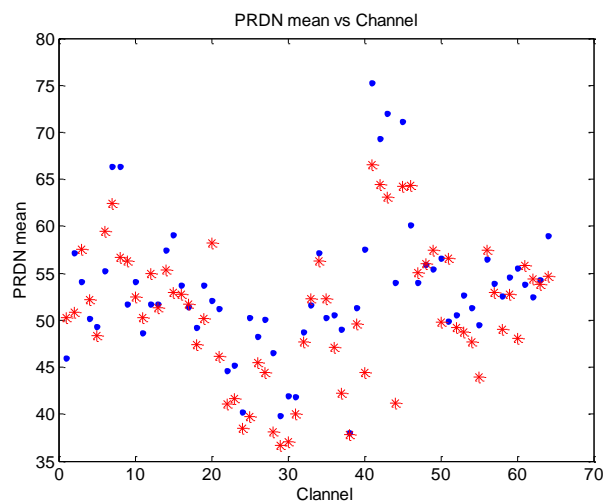


Figura 1- PRDN\_Mean Vs. Channel for dictionaries with 126 and respectively 168 atoms. for classical EEG compressed sensed (CR = 5:1)

Figura 4 prezintă topografia PRDN pentru varianta clasică de CS aplicată pe semnalul EEG. Această topografie arată că electrozii plasati frontal / centrale prezintă o eroare de reconstructie exprimată ca PRDN mai mică decât ceilalți electrozi, o zonă specifică pentru valul P3a. Zona următoare, ca eroare PRDN este zona parietală, zonă specifică pentru valul P3b.

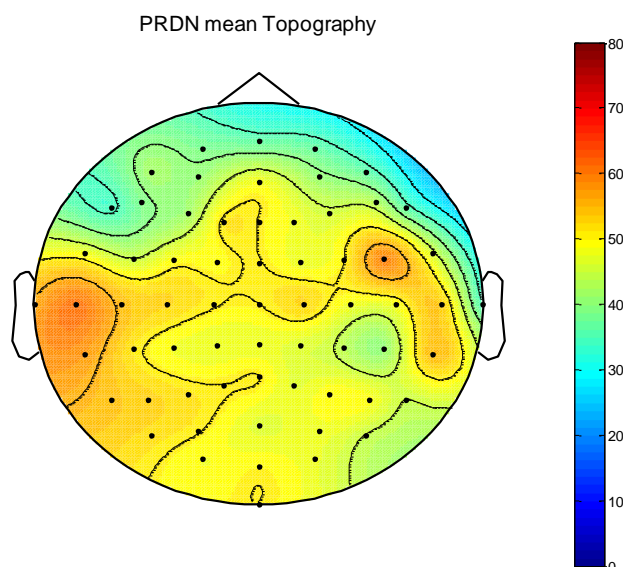


Figura 2- Topografia in cazul CS classic a erorii PRDN (CR = 5:1 si PRD mean = 44.29)

Pentru dictionarul cu 168 de atomi, adica dictionar de dimensiune 42\*168, la o rata de compresie de 10:1, s-au obtinut cele mai bune rezultate PRDN. Pentru acest dictionar am testat semnalele EEG decomprimate si ca rata de clasificare in paradigm de spelling. Pentru clasificare am utilizat scripturile lui Rakotomamonjy, winner of the Bci competition III, rezultatele fiind prezentate in Table 2.

Tabel 2- Rezultate medii pentru CS classic: PRDN\_mean si performantele de clasificare % a caracterelor din paradigm de spelling pentru subiectul B raportate functie de numarul repetitiilor (pentru CR = 5:1)

| P300 Spelling - classification performance for number of sequences (classification rate %) |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | PRDN mean |              |
|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------|--------------|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |           |              |
| Original data – uncompressed and classified by Alain Rakotomamonjy and Vincent Guigue      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |           |              |
| 38   | 60 | 70 | 69 | 80 | 84 | 86 | 89 | 92 | 93 | 95 | 96 | 96 | 96 | 95 | %         | 0            |
| Dictionary = 240 atoms from the training set for each channel                              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |           |              |
| 31   | 41 | 50 | 62 | 68 | 74 | 73 | 78 | 82 | 83 | 86 | 86 | 86 | 87 | 90 | %         | <b>44.29</b> |

### Rezultate obtinute prin CS aplicat pe semnalul EEG procesat

Tabelul 3 prezinta rezultatele pentru o compresie de CR = 10:1 aplicata pe semnalul EEG procesat iar dimensiunea dictionarului difera. Astfel se observa ca cele mai bune rezultate se obtin pentru un numar de 240 de atomi.

Tabel 3 – Rezultate medii pentru CS aplicat pe semnalul EEG procesat

| Nr Atoms   | PRD mean     | CR         | PRD mean     | CR          |
|------------|--------------|------------|--------------|-------------|
| 100        | 55.02        | 5:1        | 76.44        | 10:1        |
| 120        | 52.27        | 5:1        | 71.74        | 10:1        |
| <b>240</b> | <b>48.98</b> | <b>5:1</b> | <b>66.10</b> | <b>10:1</b> |
| 300        | 54.26        | 5:1        | 73.46        | 10:1        |
| 350        | 55.41        | 5:1        | 74.37        | 10:1        |
| 400        | 61.35        | 5:1        | 80.77        | 10:1        |

In Figura 3 se observa aceasi grupare a erorii PRDN functie de canal, asemanatoare cu cea din figura anterioara.

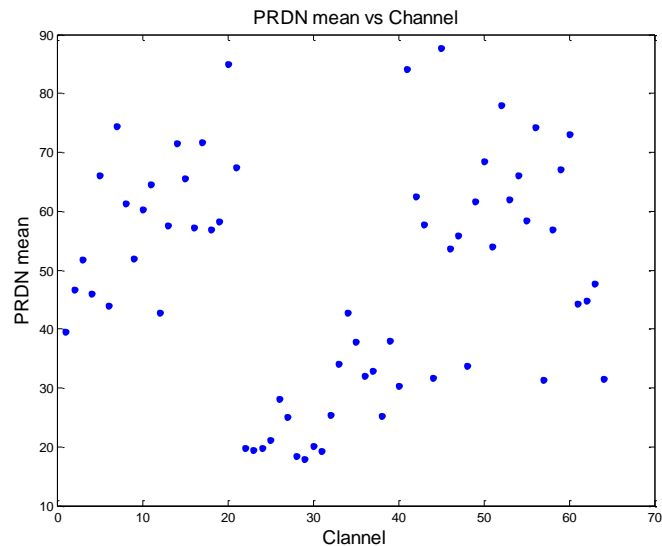


Figura 3 - PRDN\_Mean Vs. canal pentru CS aplicat pe EEG procesata, pentru compresie de CR = 5:1 and PRD mean = 48.98

Figura 4 arata ca cele mai bune rezultate se obtin pe canalele din zona frontal urmate de canalele din zona parieto-centrala.

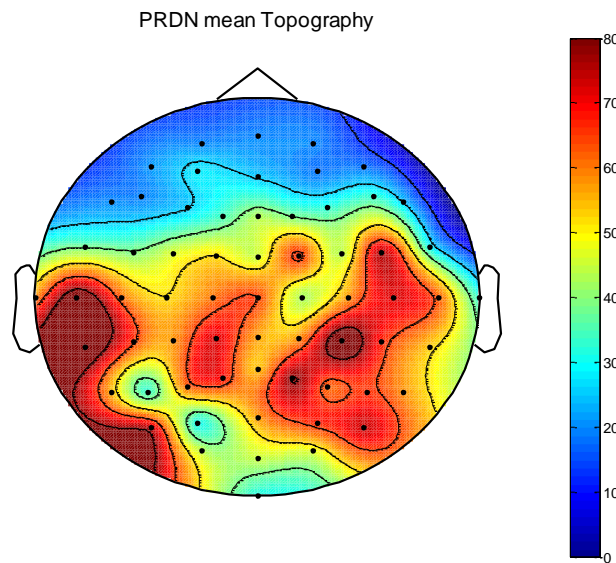


Figura 4 - Topografia PRDN-ului pentru CS aplicat pe semnalul EEG procesat CR = 5:1 si PRD mean = 48.98)

Astfel s-a constatat ca pentru compresii mici, de ex de 5:1, este mai buna metoda de CS classic (bazata pe dictionar cu segmente EEG aliniata functie de stimulul din paradigma de spelling). Pentru compresii in schimb de 10:1 este mai buna metoda "Compressed sensed for the procesed EEG signal" (bazata pe Dictionar cu atomi de dimensiune 1 sec cu unda P300 si atomi NonP300). Dezavantajul metodei Compressed sensed for the procesed EEG signal este in schimb faptul ca metoda necesita si o etapa de realiniere a semnalelor reconstruite. Adica, odata decomprimate, semnalele trebuie repositionate, deoarece in etapa de segmentare are loc de fapt o suprapunere a semnalelor (se segmenteaza bucati de 1 sec dupa fiecare stimul, iar stimulul dureaza 100 milisecunde iar perioada dintre stimuli dureaza 75 de milisecunde).

În [Fira IJACSA 2016] este prezentata posibilitatea achizitiei comprimate (CS) a semnalului EEG pe baza a doua dictionare. Au fost analizate si comparate mai multe tipuri de matrici de





Table 6. - Performana de clasificare % in paradigm de spelling P300 pentru semnalul EEG reconstruit pentru o compresie de CR = 10:1 respectiv CR = 5:1 utilizand un dictionar de la subiectul A si facand achizitie comprimata pentru subiectul B

| <b>P300 Spelling-classification performance % for dictionary from subject A and compressed sensed for subject B</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| <b>CR = 10:1</b>  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 14  | 27 | 45 | 50 | 55 | 59 | 63 | 66 | 73 | 76 | 79 | 81 | 83 | 83 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81                                      | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 | 81 |    |    |
|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | <b>Average Classification% = 76.62%</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <b>CR = 5:1</b>   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 27  | 39 | 51 | 63 | 71 | 73 | 76 | 81 | 81 | 86 | 89 | 88 | 90 | 88 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90                                      | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 |
|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | <b>Average Classification% =85.98%</b>  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

In Figure 7 and 8 este prezentata de asemenea topologia erorilor exprimate ca PRDN. Se observa ca se pastreaza aleasi localizare topologica ca si canale EEG.

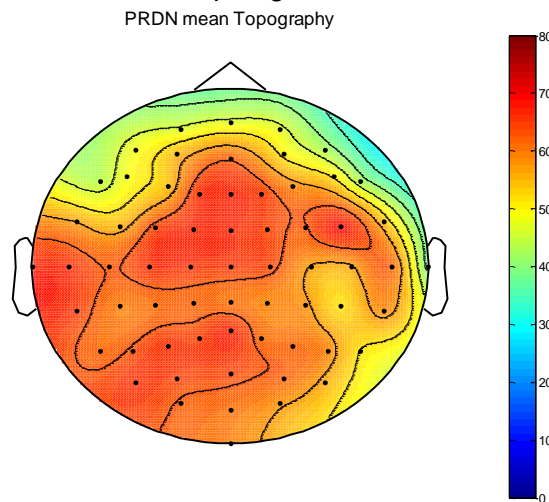


Fig. 7. - Topografia erorilor PRDN pentru semnalul reconstruit din CS (CR = 10:1 si PRD\_mean = 59.00 and PRDN\_mean =59.98)

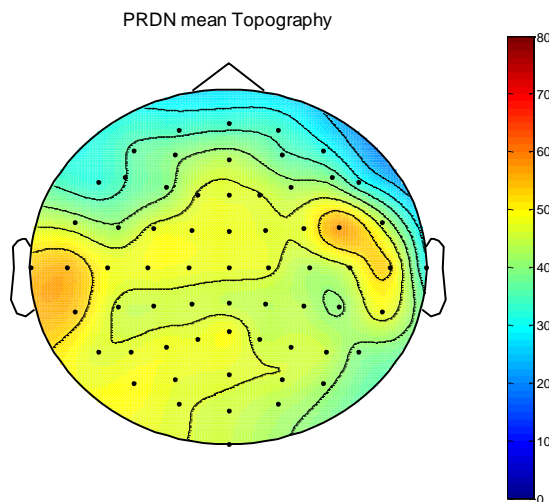


Fig. 8. Topografia erorilor PRDN pentru semnalul reconstruit din CS (CR = 5:1 si PRD\_mean = 44.30 and PRDN\_mean =45.02)

Pentru a putea face o comparatie cu dictionare standard, am folosit pentru subiectul B un dictionar wavelet Daubechies10. Se constata ca atat din punct de vedere al erorii de clasificare pe spelling (see Table 7) (o clasificare medie de 51.76%) cat si ca masuri exprimate la PRDN

(PRDN\_mean = 108.91), rezultatele sunt foarte slabe, mult sub cele obtinute chiar si cu megadictionar universal prezentat anterior.

Table 7. - Performana de clasificare % in paradigm de spelling P300 pentru semnalul EEG reconstruit pentru o compresie de CR = 10:1 utilizand un dictionary wavelet Daubechies10 (subiectul A)

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| <b>P300 Spelling - classification performance % and average PRDN</b>                                  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <b>P300 Spelling - classification performance % for Daubechies10 wavelet dictionary for subject B</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 7   | 12 | 18 | 24 | 29 | 37 | 42 | 46 | 46 | 48 | 52 | 48 | 52 | 56 | 56 | 56  | 56                   | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56                                      | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 | 56 |
|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |                      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | <b>Average Classification% = 51.76%</b> |    |    |    |    |    |    |    |    |
| PRD_mean = 107.5263   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | and | PRDN_mean = 108.9124 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |

Astfel, cele mai bune rezultate s-au obtinut cand dictionarul si datele de testare provin de la acelasi pacient, inasa pentru construirea dictionarului s-a folosit setul de antrenare iar testarea s-a realizat pe setul de date de test achizitionat comprimat si apoi reconstruit.

Pentru mega-dictionar, cele mai bune rezultate raportate ca rata de clasificare in paradigm de spelling s-au obtinut pentru rate de compresie de CR = 5:1 si 10:1 cand ratele de clasificare au fost de 88.17% si respective 81.75% (pe semnalul original, nesupus nici unei achizitii comprimate se obtine o rata de clasificare de 89.37%). In termini de eroare raportata ca PRDN se obtin PRDN = 40.93 pentru CR = 5:1 si PRDN = 54.54 pentru CR = 10:1. Aceste rezultate demonstreaza ca mega-dictionarul propus ofera rezultate imbunatatite comparative cu dictionarele wavelet standard.

**In [Fira IJACSA 2016 b] am propus o metoda de achizitie comprimata specifica semnalelor EEG bazata pe un mega-dictionar universal valabil mai multor pacienti. De asemenea este prezentata o analiză comparativă a rezultatelor obtinute folosind mai multe tipuri de matrici de proiectie și un mega-dictionar pentru semnale EEG detectare comprimat.**

Pentru a se testa metoda s-au folosit inregistrările din paradigm de spelling din cadrul competitiei BCI Competition III Challenge 2005 - Dataset II

Metoda propusa este testata si la variabilitatea inter-pacient a dictionarului, adica dictionar construit din setul de antrenare al unui subiect si testata pe setul de test al altui pacient. Baza de date de spelling pe care am testat avand doar doi pacienti vom avea urmatoarele variante posibile de testare a metodei propuse:

- Dictionary construit din setul de antrenare al subiectului A si testat pe datele de test ale subiectului A (TrainA - TestA)
- Dictionary construit din setul de antrenare al subiectului B si testat pe datele de test ale subiectului B (notat cu TrainB - TestB)
- Dictionary construit din setul de antrenare al subiectului A si testat pe datele de test ale subiectului B (notat cu TrainA - TestB)
- Dictionary construit din setul de antrenare al subiectului B si testat pe datele de test ale subiectului A (notat cu TrainB - TestA)

Se observa ca in urma reconstuctiei cu dictionar constuit din semnalul de anterare al subiectului B se obtin rate de clasificare in paradigm de spelling superioare fata de semnalul original. Acest lucru este valabil atat pentru subiectul B (92.4% comparativ cu 89.37%) cat si pentru subiectul A (89.15 % fata de 87.10%). In cazul folosirii unui dictionar alcatuit din semnale de antrenare ale subiectului A se obtin rezultate apropiate de semnalul original, inasa un pic sub rata de clasificare originala.

Tabelul 8. Performantele de clasificare % si eroarea PRDN in paradigm de spelling pentru semnalul EEG reconstruit pentru o compresie CR = 10:1 (clasificarea obtinuta cu software din [4])

|                   | CR Compression | Max Classification | Average Classification | PRDN  |
|-------------------|----------------|--------------------|------------------------|-------|
| <b>ORIGINAL A</b> | <b>10:1</b>    | <b>94 %</b>        | <b>87.10 %</b>         | -     |
| AA                | 10:1           | 90 %               | 84.29 %                | 50.17 |
| BA                | 10:1           | 95 %               | 89.15 %                | 45.09 |
| <b>ORIGINAL B</b> | <b>10:1</b>    | <b>93 %</b>        | <b>89.37 %</b>         | -     |
| BB                | 10:1           | 97 %               | 92.40 %                | 43.07 |
| AB                | 10:1           | 92 %               | 86.59 %                | 48.80 |

In figura 9 sunt reprezentate erorile PRDN pentru cei doi subiecti si pentru cele noua dictionare vs. canalele EEG. Se observa o consecventa a erorilor functie de canal, ceea ce poate fi explicat ca anumite canale se reconstituie cu erori, indiferent de dictionarul folosit. O posibila ipoteza este faptul ca aceste canale au o statistica diferita de restul canalelor si prezinta o variabilitate mai mare.

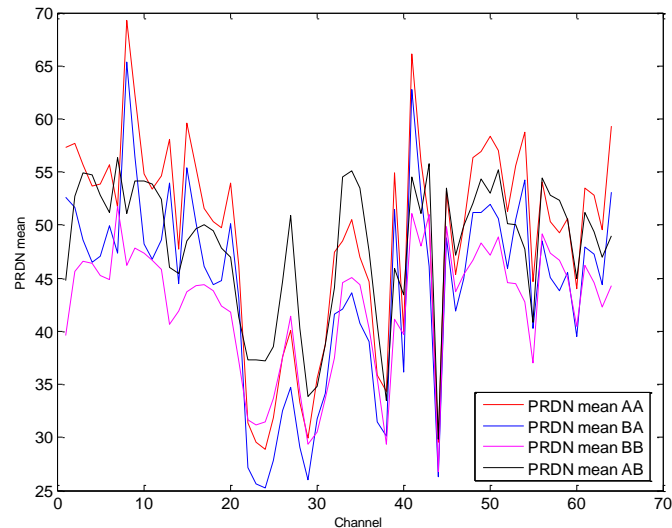


Figure 9. PRDN\_Mean vs. channel for subject A and respectively subject B using dictionaries construct by train test A and train test B

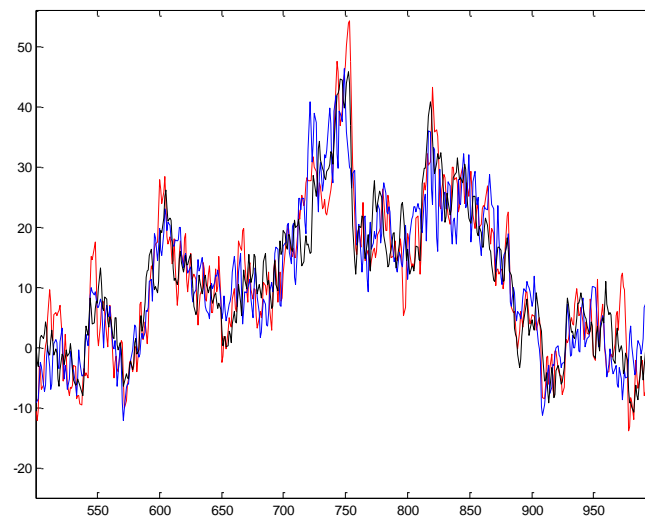


Figure 10. Example by original signal (subject A with red) and reconstructed signals (TrainA – TestA blue and TrainB-TestA black)

In Figure 10 este prezentat un segment EEG original (red) si varianta acestuia reconstruita pe baza dictionarului construit din setul propriu de train (blue) si varianta cu dictionar construit din semnalele de train ale celui alt subiect (negru). Se observa ca se pastreaza forma semnalului EEG dar exista unele variatii. Tinand cont de rezultatele de clasificare din cadrul paradigmatului de spelling putem afirma insa ca aceste variatii ale semnalului reconstruit nu influenteaza clasificarea in paradigma de spelling.



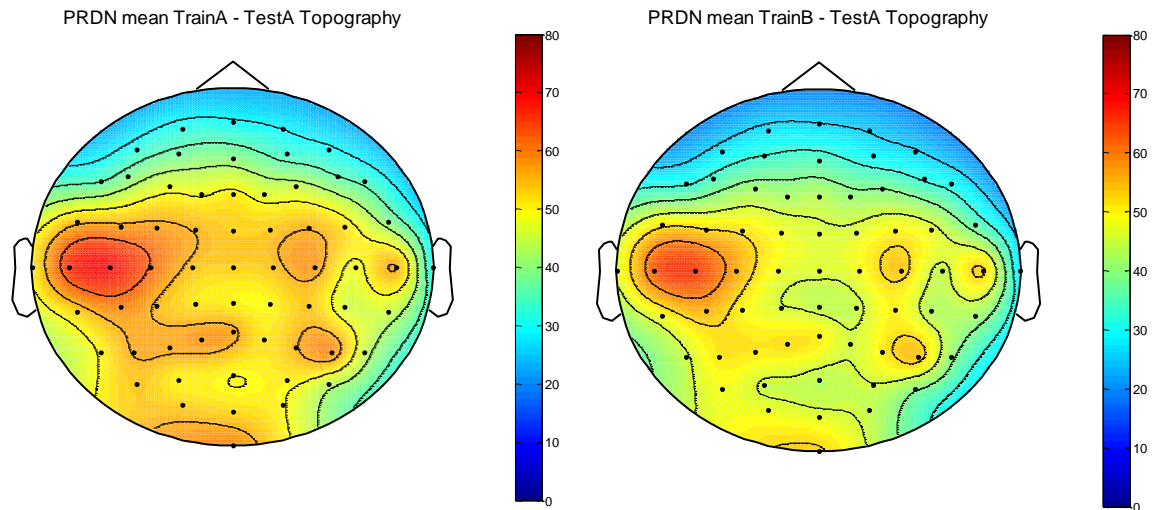


Figure 11. The topography of PRDN for EEG compressed sensing for subject A and CR = 10:1 (by TrainA – TestA and by TrainB – TestA from up to down)

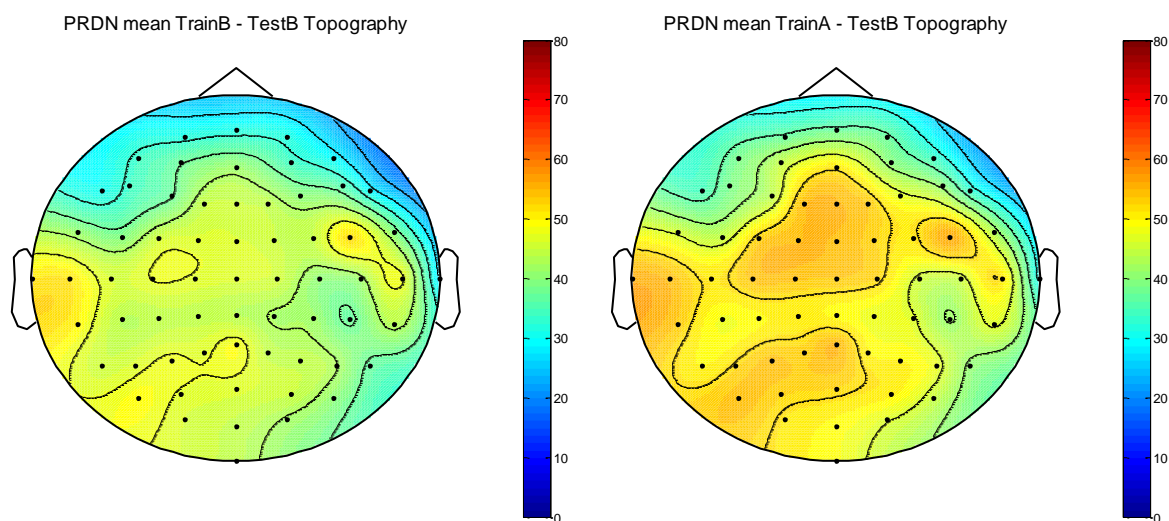


Figure 12. The topography of PRDN for EEG compressed sensing for subject B and CR = 10:1 (by TrainB – TestB and by TrainA – TestB from up to down)

Figura 11 and 12 prezinta topografia erorii PRDN pentru subiectul A si respective B. Aceasta topografie arata ac electrozii din zona frontal/central prezinta erori PRDN mai mici decat ceilalti electrozi, o zona specifica unde o P3a. Zona temporală nu are o insemnatate prea mare in generarea lui P300.

Este testata ipoteza confirm careia acest megadictionar nu este specific pacientului. Testarea acestei ipoteze presupune construirea dictionarului din setul de train al unui subiect si folosirea lui pentru reconstructia semnalelor de test a altor subiecti. Baza de date folosita are doar doi subiecti, insa semnalele EEG inregistrate sunt lungi. Astfel, s-a testat atat folosirea dictionarului in cadrul aceluasi subiect cat si la celalalt subiect. Chiar daca pentru semnalele EEG reconstruite eroarea exprimata la masura cantitativa prin PRDN este in jurul valorii 45, se constata ca rata de clasificare in paradigma de spelling este foarte apropiata de valoarea obtinuta pe semnalul original sau chiar peste aceasta. Aceste rezultate pot fi interpretate astfel: in cazul ratei de clasificare din cadrul paradigmei de spelling este foarte importanta pastrarea formei semnalului EEG si nu conteaza foarte mult micile erori de reconstructie.

Avantajul metodei compressed sensed este faptul ca etapa de achizitie este foarte rapida, de complexitate foarte mica, se face in timp real iar in urma acestei etape rezulta un semnal EEG comprimat. Partea dificila apare la reconstructia semnalului EEG si se datoreaza urmatoarelor doua aspect:

- Complexitatea de calcul, insa la ora actuala exista diferiti algoritmi matematici si functie de precizia, timpul si resursele disponibile se poate opta pentru un algoritmul favorabil
- Cunoasterea unui dictionary in care semnalul EEG initial are o starsitate multumitoare.

Astfel, s-a analizat posibilitatea constuirii unui dictionar specific semnalului EEG si dedicate in special paradigmei de spelling. Rezultatele obtinute, in special rata de clasificare in spelling demonstreaza ca dictionarul construit asigura reconstructia semnalului EEG cu rezultate bune, indiferent de semnalul EEG de train care a stat la baza constuirii dictionarului.

### **Rezultatele obtinute au fost raportate în:**

**[Fira ACHI 2016]** Monica Fira, Liviu Goras, Victor-Andrei Maiorescu, „The Analysis of the Specific Dictionaries for Compressive Sensing of EEG Signals”, International Conference on Advances in Computer-Human Interactions - ACHI 2016, Veneția, Italia, 24-28 aprilie 2016

**[Fira COMM 2016]** Monica Fira, Liviu Goras, „On Compressed Sensing for EEG Signals - Validation with P300 Speller Paradigm”, International Conference on Communications – COMMS 2016 , Bucharest, Romania, 9-11 iunie 2016, DOI: 10.1109/ICComm.2016.7528296 (indexata *IEEE Xplore*)

**[Fira IJACSA 2016]** Monica Fira, “Compressed Sensing of Multi-Channel EEG Signals: quantitative and qualitative evaluation with Speller Paradigm”, International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA), Vol. 7, No. 6, 2016 (revista indexata ISI - Thomson Reuters)

**[Fira SOMET 2016]** Monica Fira, Andrei Maiorescu, "P300 spelling and EEG compressed sensed based on a universal megadictionary", International Conference on Intelligent Software Methodologies, Tools and Techniques - SOMET 2016, Larnaca, Cipru, 12-14 septembrie 2016 (Volume 286: New Trends in Software Methodologies, Tools and Techniques, Series Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, IOS press, DOI 10.3233/978-1-61499-674-3-203, pp: 203 - 212)

**[Fira IJACSA 2016 b]** Monica Fira, Goras Liviu, “Comparison of inter-and intra-subject variability of P300 spelling dictionary in EEG compressed sensing”, International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA), Vol. 7, No. 10, 2016, 10.14569/IJACSA.2016.071049 (revista indexata ISI - Thomson Reuters)

## Anexa – COMPRESSED SENSED – PRINCIPIUL METODEI

Fie un vector  $x \in \mathfrak{R}^n$  cu reprezentare rară în baza definită de matricea  $B \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  (coloanele matricii reprezintă elementele bazei). Vectorul  $x$  poate fi scris ca

$$x = B\gamma$$

unde  $\gamma$  reprezintă descompunerea rară a lui  $x$  în  $B$ .

Să presupunem că putem face un set de  $m$  măsurători asupra lui  $x$  prin proiecția sa pe un număr de  $m$  vectori oarecare (numiți vectori de măsurare sau de proiecție), unde  $m < n$ . Dacă se consideră acești vectori de măsurare ca reprezentând liniile unei matrici de achiziție  $P \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , procesul de achiziție al semnalului  $x$  este descris de multiplicarea cu matricea  $P$ :

$$y = Px = PB\gamma = A\gamma$$

Produsul dintre  $P$  și  $B$  poartă numele de dicționar efectiv. Făcând notația  $A = PB$ , se ajunge la forma uzuală a achiziției comprimate:

$$y = A\gamma$$

Această ecuație, ilustrată în Figura 2, exprimă faptul că vectorul rar  $\gamma$  este achiziționat cu ajutorul matricii  $A$ . Întrucât în general numărul de vectori de măsurare  $m$  este mult mai mic decât dimensiunea semnalului  $n$ , procesul poartă numele de achiziție comprimată.

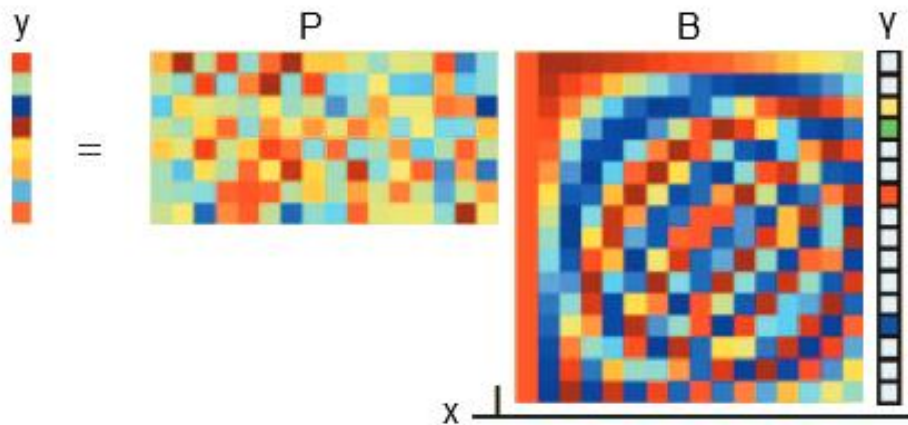


Figura - Achiziția comprimată a unui semnal rar

Problema centrală a teoriei achiziției comprimate a semnalelor poate fi enunțată în modul următor: în ce condiții este posibilă refacerea vectorului rar  $n$ -dimensional  $\gamma$  din cele  $m \ll n$  măsurători  $y$ ? Deși sistemul de ecuații este nedeterminat, numărul gradelor de libertate ale lui  $\gamma$  este mic, fiind vorba despre un semnal rar. Este așadar posibilă reconstituirea celor  $k$  coeficienți din cele  $m$  măsurători, dacă  $k < m \ll n$ . Se observă că reconstituirea lui  $\gamma$  permite imediat și reconstituirea semnalului original  $x$ , întrucât acesta se obține imediat înmulțirea lui  $\gamma$  cu matricea bazei  $B$ .

Teoria achiziției comprimate exploatează informația adițională despre raritatea semnalului într-o bază sau dicționar cunoscut. Un rezultat fundamental [Donoho 2003], [Donoho 2006] este următorul: dacă descompunerea  $\gamma$  este suficient de rară, atunci, dacă matricea  $A$  respectă o serie de condiții, vectorul  $\gamma$  este soluția cea mai rară dintre toate soluțiile sistemului de ecuații de achiziție. Aceasta înseamnă că  $\gamma$  poate fi obținut ca soluție a următoarei probleme de optimizare cu constrângeri:

$$\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma} \|\gamma\|_p \quad \text{subject to} \quad y = A\gamma$$

Această problemă constă în găsirea soluției celei mai rare a unui sistem de ecuații  $y = A\gamma$ . Pentru valorile lui  $p$  cele mai des întâlnite în literatură,  $p = 0$  și  $p = 1$ , aceasta devine:

$$\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma} \|\gamma\|_0 \quad \text{subject to} \quad y = A\gamma$$

respectiv:

$$\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma} \|\gamma\|_1 \quad \text{subject to} \quad y = A\gamma$$

Varianta care utilizează norma  $l_0$  este o problemă NP-hard [Natarajan], ceea ce înseamnă un algoritm de complexitate ne-polinomială pentru rezolvare (în ipoteza  $P \neq NP$ ); problemele NP-hard sunt considerate practic imposibil de rezolvat pentru dimensiuni uzuale ale datelor. Cea de-a doua variantă, care utilizează norma  $l_1$  pentru a asigura raritatea soluției, este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de Basis Pursuit [Candes]. Aceasta este o problemă de optimizare convexă, care poate fi reformulată ca o problemă de programare liniară. Acest tip de problemă este în detaliu studiată în literatură și există numeroși algoritmi de rezolvare eficienți;

## Anexa - PARADIGMA DE SPELLING DIN CADRUL COMPETITIEI “BCI III competition Challenge 2004”

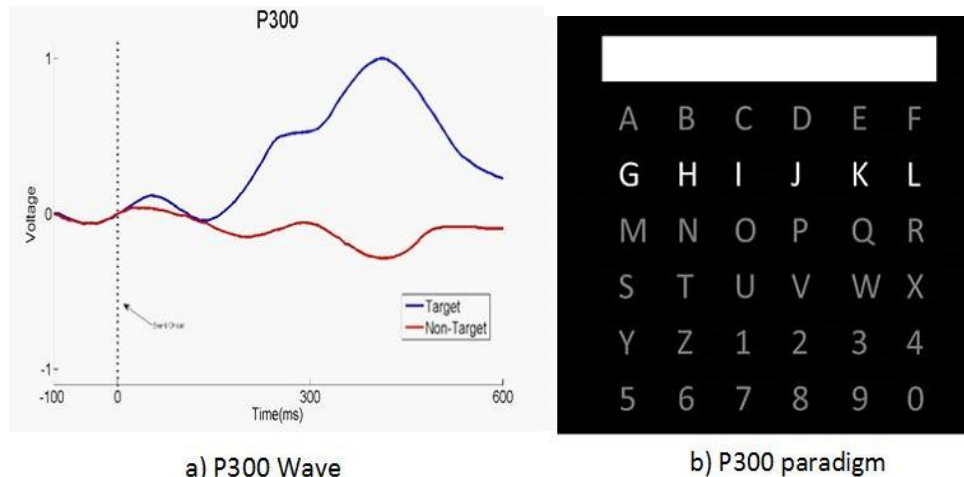


Figura - P300 wave and the classical P300 spelling paradigm described by Farwell-Donchin 1988

One of the first examples for BCI is the algorithm proposed by Farwell and Donchin [Farwell 1988] that relies on the unconscious decision making processes expressed via P300 in order to drive a computer.

The P300 speller paradigm was described in [Farwell 1988]. The subject should watch a 6x6 matrix containing all letters and digits (as shown in Figure b) and should focus the attention on characters from a given word. The protocol contains several stages:

Step 1: the matrix is presented to the subject for 2.5 seconds;

Step 2: all lines and all columns are highlighted randomly and alternatively each for 100ms.

The procedure consists in repeating step 2 for 15 times (15 epochs) for each character, followed by a pause of 2.5 seconds (step 1). For each given character, there will be  $6 \times 2 \times 15 = 180$  intensifications:  $2 \times 15$  will contain the target character (once when the column is highlighted, second for the line it belongs to, repeated for 15 epochs) and the rest will not contain it.

For the BCI III competition the dataset has been recorded from two different subjects in five sessions each and signals have been bandpass filtered in the range 0.1 - 60Hz and digitized at 240Hz. Each session is composed of runs, and for each run, a subject is asked to spell a word. For a given acquisition session, all EEG signals of a 64-channel scalp have been continuously collected. The train set contained 85 characters and the test set 100 characters for each of the two subjects. A more detailed description of the dataset can be found in the BCI competition paper [BCI2000's P3 Speller Paradigm].

The competition winners, Alain Rakotomamonjy and Vincent Guigue propose a method that copes with such variability through an ensemble of classifiers approach [Rakotomamonjy 2008]. Each classifier is composed of a linear Support Vector Machine trained on a small part of the available data and for which a channel selection procedure has been performed. They succeeded a classification rate of 95.5% for 15 sequences and 73.5% for 5 sequences [Rakotomamonjy 2008]

### **Bibliografie**

[Farwell 1988] Farwell L.A., Donchin, E. Talking off the top of your head: toward a mental prosthesis utilizing event-related brain potentials. *Electroencephalography & Clinical Neurophysio.* 70(6):510-23, 1988

[BCI2000's P3 Speller Paradigm] Data Acquired Using BCI2000's P3 Speller Paradigm (<http://www.bci2000.org>)

[Rakotomamonjy 2008] A. Rakotomamonjy, V. Guigue, BCI Competition III: Dataset II- Ensemble of SVMs for BCI P300 Speller, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol:55, Issue: 3, pp. 1147 – 1154, 2008.

**LUCRARI ALE MEMBRILOR ECHIPEI PE DOMENIUL PROIECTULUI IN PERIOADA OCTOMBRIE 2015  
– DECEMBRIE 2016**

1. Adrian Brezulianu, Monica Fira, Marius Daniel Pestina, *Compressed Sensing Based Encryption Approach for Tax Forms Data*, International Journal of Advanced Research in Artificial Intelligence (IJARAI), Volume 4 Issue 11, 2015 (Revista BDI)
2. Fira Monica, *Applications of Compressed Sensing: Compression and Encryption*, International Conference on e-Health and Bioengineering, EHB 2015, 19-21 Noiembrie, Iasi, Romania (conferinta indexata IEEE Xplore si ISI proceedings)
3. Silvia Monica Feraru, Marius Dan Zbancioc, Roxana Mihaela Barbu, Cristina Maria, *Using the Decision Tree for Emphasizing the Benefits of Associating Antioxidants in the Therapy of the Metabolic Syndrome*, International Conference on e-Health and Bioengineering, EHB 2015, 19-21 Noiembrie, Iasi, Romania (conferinta indexata IEEE Xplore si ISI proceedings)
4. Oana-Diana Eva și Anca Mihaela Lazăr, *Channel Selection for Motor Imagery Paradigm - an Itakura Distance based Method*, International Conference on e-Health and Bioengineering, EHB 2015, 19-21 Noiembrie, Iasi, Romania (conferinta indexata IEEE Xplore si ISI proceedings)
5. Oana-Diana Eva, Anca Mihaela Lazăr, Monica Fira, *Normalized Itakura Distance for MU Rhythm*, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Tomul LIX (LXIII), Fasc. 4, 2015, Secția, Electrotehnică, Energetică, Electronică, pp. 91- 101 (Revista BDI)
6. Monica Fira, Liviu Goras, Victor-Andrei Maiorescu and Mihaela Catalina Luca, *Compressed Sensing and Clasification of Cardiac Beats Using Patient Specific Dictionaries*, International Conference of Information and Communication Technologies for Ageing Well and e-Health - ICT4AWE2016, Roma, Italia, 21-22 aprilie 2016
7. Monica Fira, Liviu Goras, Victor-Andrei Maiorescu, *The Analysis of the Specific Dictionaries for Compressive Sensing of EEG Signals*, International Conference on Advances in Computer-Human Interactions - ACHI 2016, Veneția, Italia, 24-28 aprilie 2016
8. Monica Fira, Liviu Goras, *On Compressed Sensing for EEG Signals - Validation with P300 Speller Paradigm*, International Conference on Communications, COMMS 2016 , Bucharest, Romania, 9-11 iunie 2016, DOI: 10.1109/ICComm.2016.7528296 (conferinta indexata IEEE Xplore si ISI proceedings)
9. Monica Fira, *Compressed Sensing of Multi-Channel EEG Signals: quantitative and qualitative evaluation with Speller Paradigm*, International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA), Vol. 7, No. 6, 2016 (revista indexata ISI - Thomson Reuters)

10. Monica Feraru, Monica Fira și Marius Zbancioc, *A new emotional corpus for the Romanian Language*, *International Conference on Development and Application Systems DAS 2016*, 19-21 mai 2016, Suceava, Romania (conferinta indexata IEEE Xplore si ISI proceedings)
11. Monica Fira, Andrei Maiorescu, *P300 spelling and EEG compressed sensed based on a universal megadictionary*, *International Conference on Intelligent Software Methodologies, Tools and Techniques - SOMET 2016*, Larnaca, Cipru, 12-14 septembrie 2016 (Volume 286: New Trends in Software Methodologies, Tools and Techniques, Series Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, IOS press, DOI 10.3233/978-1-61499-674-3-203, pp: 203 - 212) (Revista BDI)
12. Monica Fira, Liviu Goras, *Comparison of inter-and intra-subject variability of P300 spelling dictionary in EEG compressed sensing*, *International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA)*, Vol. 7, No. 10, 2016 (revista indexata ISI - Thomson Reuters)

#### LUCRARI TRIMISE LA REVISTE SI IN STADIU DE EVALUARE

13. Cleju Nicolae, *Analysis Sparsity With Explicit Orthogonality Constraint*, *Acta Applicandae Mathematicae*, IN EVALUARE, ISSN 0167-8019 , Impact Factor = 0.853 (revista indexata ISI - Thomson Reuters)
14. Oana Eva, Anca Lazar, *Detection and Classification of Mu Rhythm using Phase Synchronization for a Brain Computer Interface*, *International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA)*, (revista indexata ISI - Thomson Reuters)